Анализ и оценки, но больше оценки
25 декабря 2022 г.

1. Докажите, что в последовательности $a_n = \left[n \cdot \sqrt{2022}\right]$ найдётся подпоследовательность из 1000 элементов, являющаяся геометрической прогрессией со знаменателем, большим 1000.

2. В тёмной комнате 10×10 м бегает таракан со скоростью 0.1 м/с. Сможет ли Таня поймать таракана, если у неё есть фонарь, который освещает круг радиуса 1 м (с центром в Тане), а её скорость 1 м/с?

3. Существует ли такое натуральное число n, что среди двухсотых цифр после запятой чисел

$$\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, \ldots, \sqrt{n+999}$$

ровно сто раз встречается цифра 0, сто раз — цифра 1, сто раз — цифра 2, ..., сто раз — цифра 9?

4. (*Теорема о пицце*) Внутри круглой пиццы отметили произвольную точку. Через точку провели через неё $4k$ прямых, разбивающих плоскость на равные углы. Эти углы раскрашены в шахматном порядке в чёрный и в белый цвета. Докажите, что площадь чёрной части пиццы равна площади белой.

5. Для некоторого многочлена с вещественными коэффициентами существует бесконечное множество его вещественных значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных] точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.

6. Внутри квадрата со стороной 10 сидит невидимая блоха. Левша и блоха играют, ходя по очереди. Очередным n-м ходом Левша проводит прямую, после чего блоха совершает прыжок длины $1/n$, не пересекающий ни одной проведённой Левшой прямой и не выводящий за пределы квадрата. Если такой прыжок невозможен, блоха проигрывает. Может ли Левша выиграть, как бы ни играла блоха?

7. Последовательность a_n натуральных чисел при всех натуральных n задана формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности a_n найдётся такой, десятичная запись которого содержит цифру 5.