Быстрый поиск идей
24 декабря 2022 г.

1. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей можно такими ходами поставить на доску?

2. Даны четыре прямые общего положения, точки попарного пересечения которых обозначены через A, B, C, D, E, F. На каждой прямой отмечено по точке, каждая из которых движется вдоль этой прямой с постоянной скоростью. Известно, что для каждой из вершин A, B, C, D, E какие-то две движущиеся точки проезжают через эту вершину одновременно. Докажите, что это же справедливо и для вершины F.

3. Докажите, что для любых взаимно простых чисел a и b найдутся такие целые числа p и q, что числа $p + na$ и $q + nb$ взаимно просты при любом натуральном n.

4. Дана клетчатая полоска $1 \times n$. Изначально в каждой клетке полоски лежит по одной печеньке. За одну операцию выбрать клетку и перенести всю стопку имеющихся там печенек влево или вправо на столько клеток, сколько печенек в стопке. Для каких натуральных n можно за $n - 1$ операцию можно собрать все печеньки в одной клетке?

5. Для вещественных чисел x и y определим операцию $\bullet$ следующим образом: $x \bullet y = xy + 4y - 3x$. Вычислите значение

$$((\ldots(((2022 \bullet 2021) \bullet 2020) \bullet 2019) \bullet \ldots) \bullet 2) \bullet 1.$$

6. На окружности даны несколько точек. Они начинают двигаться по окружности равномерно с одинаковыми скоростями (возможно, в разных направлениях). Когда две точки сталкиваются, они меняют направления на противоположные. Когда точка второй раз попадает в свою начальную позицию, она исчезает. Докажите, что, когда число точек стабилизируется, оно будет чётно.

7. Дано натуральное число k. У числа $4k$ выписали все его делители:

$$1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_m = 4k.$$

Докажите, что найдётся $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $d_i - d_{i-1} = 2$.

8. Дан выпуклый многогранник Π с не менее 5 вершинами в пространстве, все грани многогранника Π являются треугольниками. Внутри многогранника отмечена точка K. Докажите, что найдётся такая грань ABC, что для любой вершины D многогранника Π тетраэдр $ABCD$ не содержит строго внутри себя точку K.