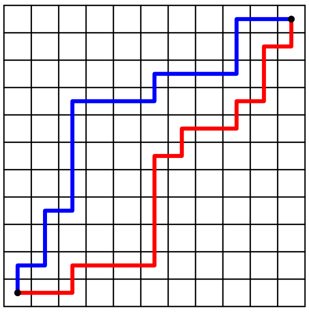
Идейные задачи
22 декабря 2022 г.

1. В вершинах правильного 1001-угольника стоят нули. За один ход разрешается выписать на доску целое число $1 \leqslant k \leqslant 500$, выбрать любую вершину многоугольника, прибавить к числу в ней 2, а из чисел, стоящих в вершинах, отстоящих от выбранной по часовой и против часовой стрелки на k, вычесть по 1. Через несколько ходов в вершинах вновь оказались нули. Докажите, что сумма квадратов выписанных на доску чисел кратна 1001.

2. Дано натуральное число n. Рассмотрим перестановки $\sigma\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$, для которых при всех $k \in \{1,\ldots,n\}$ число $k+\sigma(k)$ — простое. Докажите, что количество таких перестановок является квадратом целого числа.

3. Даны натуральное число n и его натуральный делитель d. Рассмотрим всевозможные наборы из n целых чисел вида $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant n$, в которых сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ всех элементов кратна d. Докажите, что ровно в половине рассматриваемых наборов выполнено равенство $a_n = n$.

4. Изначально в левом нижнем углу доски $(m+1)\times(n+1)$ лежат две фишки: красная и синяя. За один ход разрешается независимо друг от друга сдвинуть каждую из фишек в одном из двух направлений: вправо либо вверх. Сколькими способами можно провести серию из $m+n$ ходов так, чтобы обе фишки в результате оказались в правом верхнем углу и в процессе фишки никогда не находились на одной клетке (не считая общее начало и общий конец их траекторий)?



5. Рассмотрим n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Предположим, что прогрессии в объединении покрывают какие-то 2^n последовательных целых чисел. Докажите, что прогрессии в объединении покрывают все целые числа.

6. В графе степени всех вершин равны 3 и есть гамильтонов цикл. Докажите, что в нём существует ещё один гамильтонов цикл.