Динамические системы и многомерная теорема Кронекера
21 декабря 2022 г.

1. (*Классика*)
(a) Докажите, что некоторая степень семёрки начинается с 20212021.
(b) Периодична ли последовательность первых цифр числа $2^n + 3^n$?

2. (*ММО-2016*)
(a*) Можно ли число $1/10$ представить в виде произведения десяти положительных правильных дробей?
(b) Можно ли число $1/10$ представить в виде произведения десяти положительных конечных десятичных дробей, меньших единицы?

3. На прямой конечное число отрезков суммарной длиной 2.41 покрашено чёрным, в одной из чёрных точек сидит кузнечик. Кузнечик умеет прыгать по прямой на 1 влево или на $\sqrt{2}$ вправо. Докажите, что даже если он сам будет выбирать тип прыжка, он не сможет все время оставаться на чёрной части прямой.

4. Кузнечик живет на плоскости и умеет прыгать на вектора $(-1, 0)$, $(0, -1)$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Докажите, что он не сможет все время оставаться внутри многоугольника площади меньшей, чем $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (многоугольник не обязан быть выпуклым).

5. Все комплексные корни приведённого многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами лежат на окружности $z \cdot \bar{z} = 1$. Докажите, что все его корни в некоторой натуральной степени дают 1.

Непрерывная теорема Кронекера. По окружности длины 1 ползают n пронумерованных улиток с рационально независимыми скоростями α_1, α_2, …, α_n. На окружности отмечены n интервалов I_1, I_2, …, I_n. Тогда существует момент времени, когда для всех $k = 1, \ldots, n$ улитка с номером k будет находиться в интервале I_k.

Дискретная теорема Кронекера. По окружности длины 1 прыгают n пронумерованных кузнечиков, длины прыжков которых равны α_1, α_2, …, α_n соответственно. Известно, что числа 1, α_1, α_2, …, α_n рационально независимы. На окружности отмечены n интервалов I_1, I_2, …, I_n. Тогда существует момент времени, когда для всех $k = 1, \ldots, n$ кузнечик с номером k будет находиться в интервале I_k.

6. Докажем многомерную теорему Кронекера
(a) Из дискретной теоремы для n кузнечиков выведите непрерывную для $n+1$ улиток.
(b) Из непрерывной теоремы для n улиток выведите дискретную для n кузнечиков.

Теорема Пуанкаре о возвращении. Дан квадрат $K = [0,1] \times [0,1]$ и биективное отображение $f\colon K \to K$, сохраняющее площади всех подмножеств квадрата. В квадрате K отмечено подмножество S положительной площади и точка $x_0 \in S$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ определим $x_n = f(x_{n-1})$. Тогда для почти всех точкек x_0 множества S (за исключением множества площади 0) существует $t \in \mathbb{N}$, что $x_t \in S$.

7. Докажем теорему Пуанкаре о возвращении.
(a) Пусть $S_0 = S$ и $S_n = f(S_{n-1})$ для $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $S_0 \cap S_k$ имеет положительную площадь.
(b) Завершите доказательство теоремы.

8. На окружности длины 1 отмечен интервал (a, b). Кузнечик прыгает по окружности в фиксированном направлении с длиной прыжка $0 < \alpha < 1$. Для каждой точки x интервала обозначим через $f(x)$ минимальное число прыжков, за которое кузнечик, стартовав из точки x, возвращается на интервал (a, b). Докажите, что

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

9. Дан шоколадный сверху тортик и вещественные числа α и β, оба больше 0, но меньше 2π. За операцию можно вырезать кусочек с углом α в фиксированном месте, перевернуть его и вставить обратно, затем повернуть тортик на β. Докажите, что после нескольких операций весь шоколад на тортике вновь окажется сверху.

10. Дан выпуклый многоугольник с рационально кратными π углами. Докажите, что в многоугольнике существует периодическая бильярдная траектория.

11. (a) Дано иррациональное число α. Докажите, что на окружности длины 1 можно закрасить несколько дуг с суммой длин 0,499 в чёрный цвет так, чтобы расстояние (по окружности) между любыми двумя чёрными точками было отлично от α.
(b) Числа 1, α_1, α_2, …, α_n рационально независимы. Докажите, что на окружности длины 1 можно закрасить несколько дуг с суммой длин 0,499 в чёрный цвет так, чтобы расстояние (по окружности) между любыми двумя чёрными точками не было равно никакому α_i.