[Сборы кандидатов] Шевцов А. А.

[*2022–2023 уч. г.*] группа: X *20 декабря 2022 г.*

Счет в синусах (умный и не очень)

1. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и BC выбраны произвольные точки M и N соответственно. Точки P и Q лежат в той же полуплоскости относительно прямой MN, что и точка C, и удовлетворяют условию $\Delta CMN \sim \Delta PAN \sim \Delta QMB$ (подобия с указанным порядком вершин). Докажите, что $OP = OQ$.

2. На вневписанной окружности ω_A треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, выбрана такая точка A_1, что прямая BC делит пополам отрезок касательной к ω_A в точке A_1, высекаемый углом BAC. Аналогично выбраны точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ – полувписанные окружности треугольника ABC. Окружность Ω_A проходит через точки B, C и касается окружности ω_A в точке A'. Точки B', C' определяются аналогично. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что диагонали выпуклого шестиугольника, образованного внутренними касательными к трем попарно непересекающимся окружностям, пересекаются в одной точке.

5. Главные диагонали выпуклого шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ пересекаются в одной точке. Описанные окружности треугольников CAC_1 и BAB_1 вторично пересекаются в точке A_0. Точки B_0 и C_0 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

6. На прямой Эйлера треугольника ABC выбрана точка D, лежащая внутри него. E и F - пересечения прямых BD, CD со сторонами AC, AB соответственно. Точка X лежит на прямой AD, причем $\angle EXF = 180 - \angle A$ и A, X лежат по одну сторону относительно EF. Докажите, что если P – вторая точка пересечения окружностей CXF, BXE, то прямые XP и EF пересекаются на высоте треугольника ABC, опущенной из вершины A.

7. X, Y – точки пересечения описанной окружности треугольника ABC с его вневписанной окружностью ω_A, лежащей напротив вершины A. P, Q – проекции A на касательные к ω_A в точках X, Y. Касательная к окружности APX в точке P и касательная к окружности AQY в точке Q пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

8. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке X. Докажите, что если X_A, X_B, X_C – отражения точки X относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно, то прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.

[Сборы кандидатов] Шевцов А. А.

[*2022–2023 уч. г.*] группа: X *20 декабря 2022 г.*

Счет в синусах (умный и не очень)

1. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и BC выбраны произвольные точки M и N соответственно. Точки P и Q лежат в той же полуплоскости относительно прямой MN, что и точка C, и удовлетворяют условию $\Delta CMN \sim \Delta PAN \sim \Delta QMB$ (подобия с указанным порядком вершин). Докажите, что $OP = OQ$.

2. На вневписанной окружности ω_A треугольника ABC, лежащей напротив вершины A, выбрана такая точка A_1, что прямая BC делит пополам отрезок касательной к ω_A в точке A_1, высекаемый углом BAC. Аналогично выбраны точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ – полувписанные окружности треугольника ABC. Окружность Ω_A проходит через точки B, C и касается окружности ω_A в точке A'. Точки B', C' определяются аналогично. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что диагонали выпуклого шестиугольника, образованного внутренними касательными к трем попарно непересекающимся окружностям, пересекаются в одной точке.

5. Главные диагонали выпуклого шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ пересекаются в одной точке. Описанные окружности треугольников CAC_1 и BAB_1 вторично пересекаются в точке A_0. Точки B_0 и C_0 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

6. На прямой Эйлера треугольника ABC выбрана точка D, лежащая внутри него. E и F - пересечения прямых BD, CD со сторонами AC, AB соответственно. Точка X лежит на прямой AD, причем $\angle EXF = 180 - \angle A$ и A, X лежат по одну сторону относительно EF. Докажите, что если P – вторая точка пересечения окружностей CXF, BXE, то прямые XP и EF пересекаются на высоте треугольника ABC, опущенной из вершины A.

7. X, Y – точки пересечения описанной окружности треугольника ABC с его вневписанной окружностью ω_A, лежащей напротив вершины A. P, Q – проекции A на касательные к ω_A в точках X, Y. Касательная к окружности APX в точке P и касательная к окружности AQY в точке Q пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

8. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке X. Докажите, что если X_A, X_B, X_C – отражения точки X относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно, то прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.