Быстрый поиск идей
14 октября 2022 г.

1. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждый из них проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

2. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 8, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 100!. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число $10! = 3628800$?

3. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

4. График квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами пересекает ось абсцисс в точках X и Z, а ось ординат — в точке Y (все три точки различны). Найдите наибольшее возможное значение угла XYZ.

5. Из проклятого старого дома в избушку лесника поочерёдно выходят путники, на каждом из которых сидит своя муха. Все путники идут с постоянными различными скоростями; для любой пары путников известно, что более медленный из них вышел из проклятого старого дома раньше, но пришёл к леснику позже. Когда два путника встречаются, мухи на них меняются местами (никакие три путника не встречаются вместе одновременно). Докажите, что какая-то муха побывает на всех путниках.

6. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности и выполнено

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2bc + 2ca + 2ab.$$

Докажите, что a, b, c — точные квадраты.

7. В противоположных углах доски 100×100 стоят две фишки: красная и синяя. Два игрока по очереди передвигают фишки на соседнее по стороне поле (две фишки могут стоять на одном поле). Первый игрок двигает только красную фишку, второй — только синюю. Первый игрок выигрывает, если после его хода отрезки, соединяющие центр доски с центрами занятых клеток, перпендикулярны. Может ли второй игрок ему помешать?

8. Существует ли такая кусочно-линейная функция $f\colon [-1, 1] \to [-1, 1]$, при всех вещественных x удовлетворяющая $f(f(x)) = -x$? Функция *кусочно-линейная*, если её область определения можно разбить на конечное число отрезков, точек, интервалов, полуинтервалов, на каждом из которых функция линейна.

9. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами $1, 2, \ldots, n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.