

**Продолжение комбинаторики****13 октября 2022 г.**

5. Из прямоугольника  $100 \times 101$  по клеточкам вырезали несколько равнобедренных пятиклеточных уголков и прямоугольников  $2 \times 4$ . Какое наименьшее количество клеток могло остаться?

6. Докажите, что количество диаграмм Юнга из  $2n$  клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники  $1 \times 2$ , в два раза больше количества диаграмм Юнга из  $n$  клеток.

7. Каждое натуральное число из множества  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  окрашено в белый, красный или синий цвет. Пусть  $S$  — количество упорядоченных одноцветных троек  $(x, y, z)$  таких, что  $x, y, z \in M$  и  $x+y+z$  делится на  $n$ , а  $T$  — количество упорядоченных трёхцветных троек с теми же свойствами. Докажите, что  $2S \geq T$ .

**Продолжение геометрии****13 октября 2022 г.**

6. Consider a triangle  $ABC$ . The points  $D, E$  are on sides  $AB, AC$  such that  $BDEC$  is a cyclic quadrilateral. Let  $P$  be the intersection of  $BE$  and  $CD$ .  $T$  is a point on  $AC$  such that  $\angle PTA = 90^\circ$ . Let  $M, N$  be the midpoints of  $AP, BC$ . Prove that:  $\triangle ACD \sim \triangle MNT$ .

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  отмечены инцентр  $I$  и середина  $N$  дуги  $BAC$  описанной окружности. Прямая  $AN$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $L$ . На отрезке  $AI$  нашлась такая точка  $X$ , что  $\angle XNI = \angle ALI$ . Прямая  $NX$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $Y$ . Докажите, что точка  $X$  — середина отрезка  $NY$ .

8. Внеписанная окружность  $\omega_A$  треугольника  $ABC$  касается отрезка  $BC$  в точке  $K$  и пересекает окружность  $(ABC)$  в точках  $X$  и  $Y$ . Прямые  $KX$  и  $KY$  пересекают серпер к высоте  $AD$  треугольника  $ABC$  в точках  $U$  и  $V$ . Докажите, что четырёхугольник  $AUDV$  — ромб.