Быстрый поиск идей
12 октября 2022 г.

1. На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

2. Вадим строит последовательность натуральных чисел. Он выбирает $a_1 > 100$, а $a_{k+1} = a_k^2 - 1$. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

3. На kn карточках с двух сторон написаны числа от 1 до n по $2k$ раз каждое. Докажите, что эти карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое число было написано ровно k раз.

4. На клетках $c3$ и $h7$ шахматной доски стоят белая и черная ладьи. Двое по очереди, начиная с белых, двигают ладью своего цвета на любое число клеток по горизонтали или вертикали. Запрещается ходить ладьей под бой другой ладьи и останавливаться на клетке, на которой эта ладья уже была ранее. Тот, кто не может сделать ход, проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Две параболы $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы ax^2+bx+c (где $a > 0$) в точках A и B. Докажите, что прямая AB параллельна общей касательной к первым двум параболам.

6. В клетках клетчатой полоски $1\times(n+2)$ расставлены фишки: две первые клетки пустые, в третьей клетке лежит одна фишка, в четвёртой — две фишки, в пятой — три фишки, …, в последней — n фишек. Двое играют в игру: Петя каждый ход разбивает все оставшиеся фишки на два непересекающихся подмножества, а Вася все фишки одного из подмножеств сдвигает на одну клетку влево, а фишки второго подмножества выкидывает. Если в какой-то момент в первой клетке оказалась фишка, Петя выиграл. Может ли Вася помешать Пете выиграть?

7. Натуральные числа a, b, c, n таковы, что $a^n + b^n = c^n$. Докажите, что $c > n$. *Разумеется, без использования Великой теоремы Ферма.*

8. Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый ориентированный простой путь содержал не более 10 рёбер.