Немного геометрии
11 октября 2022 г.

1. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD, вне окружности выбрана точка S. Касательные из точки S к окружности пересекают прямую CD в точках P и Q. Прямые SA и SB пересекают прямую CD в точках X и Y. Докажите, что $PX = QY$.

2. В треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC, а на стороне AB выбрана точка P. Лучи PM и AC пересекаются в точке Q. Точка N — середина отрезка PQ. Прямая AN второй раз пересекает окружность (ABC) в точке S, отличной от N. Докажите, что окружность (MNS) касается прямой BC.

3. Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PD = PE = PF$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках D, E и F к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

4. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 45^\circ$. Обозначим его ортоцентр через H. На окружности (ABC) отметим такую точку P, что окружность (PHB) касается прямой BC. Последовательно обозначим через O, X, Y, U, V центры окружностей (ABC), (PHB), (PHC), (PXO), (PYO). Докажите, что точки U и V лежат на прямых AB и AC соответственно.

5. На сторонах AB, AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что отражение прямой BC относительно прямой XY касается окружности (AXY). Докажите, что окружность (AXY) касается окружности (BOC), где точка O — центр окружности (ABC).