

Немного комбинаторики**11 октября 2022 г.**

1. Назовём несколько точек плоскости с различными абсциссами *крышкой* (*чашкой*), если ломаная, соединяющая точки в порядке возрастания абсцисс, является выпуклой вверх (вниз) функцией.

(a) Пусть $k, l \geq 2$ — произвольные целые числа. Докажите, что среди любых $C_{k+l-2}^{l-1} + 1$ точек плоскости с различными абсциссами найдется либо чашка из $k + 1$ точек, либо крышка из $l + 1$ точек. **(b)** Является ли предыдущая оценка точной?

2. Шашка передвигается из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний угол, на каждом шагу перемещаясь на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Пусть a — число путей, в которых ровно 70 шагов шашка совершает под диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а b — число путей, в которых таких шагов ровно 110. Что больше: a или b ?

3. (a) На плоскости отмечены n точек, и не существует прямой, на которой бы лежали все отмеченные точки. Докажите, что есть хотя бы n прямых, каждая из которых содержит хотя бы две отмеченные точки.

(b) Пусть множество X состоит из $n \geq 3$ элементов, а A_1, \dots, A_m — такие собственные подмножества множества X , что каждая пара элементов X содержится только в одном из подмножеств A_i . Тогда $m \geq n$.

4. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0; 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что количество червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, равняется $\varphi(n)$.