Плотность числовой последовательности
10 октября 2022 г.

1. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $S := \sum \frac{1}{d_i}$.
(a) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.
(b) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$.
(c) Докажите, что есть такое разбиение на бесконечное число прогрессий, что $S < 1$.

2. Существуют ли 2017 непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 2017, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?

3. Некоторые натуральные числа покрашены в красный цвет. Известно, что для любого натурального числа N как минимум 1% чисел отрезка $\{1, 2, \ldots, N\}$ — красные. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность красных натуральных чисел такая, что ни один её член не кратен другому её члену.

4. (*Классика*) Дано иррациональное число $\alpha > 1$. Кузнечик прыгает по числовой прямой, стартуя из точки 0, каждый раз перемещаясь на α вправо. Луч $[1, +\infty)$ разбит натуральными точками на единичные полуинтервалы вида $[n, n+1)$. Обозначим объединение всех полуинтервалов, в которых побывает кузнечик, через X_α.
(a) Предположим, что существует такое иррациональное $\beta > 1$, что $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ и $X_\alpha \cup X_\beta = [1, +\infty)$. Выразите β через α.
(b) Докажите, что для каждого иррационального $\alpha > 1$ существует такое иррациональное $\beta > 1$, что $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ и $X_\alpha \cup X_\beta = [1, +\infty)$.
(c) Существуют ли три иррациональных числа $\alpha, \beta, \gamma > 1$ таких, что $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, $X_\beta \cap X_\gamma = \emptyset$, $X_\gamma \cap X_\alpha = \emptyset$ и $X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma = [1, +\infty)$?

5. Дано натуральное число N. Из отрезка $\{1, 2, \ldots, N\}$ выбрали несколько натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ так, что $\sum \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{11}{10}$. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, наименьшее общее кратное которых не превосходит $10N$.

6. Будем говорить, что множество $S \subset \mathbb{N}$ *обладает нулевой плотностью*, если $\frac{1}{n} \cdot |S \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \to 0$ при $n \to \infty$. Известно, что при любом $k \in \mathbb{N}$ множество $S \cap (S - k)$ имеет нулевую плотность. Следует ли из этого, что само множество S имеет нулевую плотность? Стандартное обозначение $S - k := \{x - k \mid x \in S\}$.

7. В бесконечной последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ каждое натуральное число встречается ровно один раз. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что НОД $(a_n, a_{n+1}) \leqslant \frac{3n}{4}$.

8. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая двум условиям.

- При всех $m, n \in \mathbb{N}$ число $\frac{f^{(n)}(m) - m}{n} \in \mathbb{N}$, где $f^{(n)}(m) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ раз}}(m)))$.
- f не принимает лишь конечное число значений.

Докажите, что последовательность $a_m = f(m) - m$ периодична.

9. Существует ли такое бесконечное множество M, состоящее из натуральных чисел, такое, что для любых его различных элементов a и b число $a + b$ свободно от квадратов? Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на какой точный квадрат, отличный от 1.