Геометрия с соотношениями
05 октября 2022 г.

1. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите $\angle BAC$.

2. Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках M и N. Известно, что $\angle BAC = 2\angle MAN$. Докажите, что $BC = 2MN$.

3. В остроугольном треугольнике ABC отметили центры O и I описанной и вписанной окружностей соответственно и ортоцентр H. Докажите, что $OI \parallel BC \iff \angle AIH = 90^\circ$.

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда площади треугольников ACE и BDF равны.

5. В треугольнике ABC через O, I обозначены центры соответственно описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность ω_A касается продолжений сторон AB и AC соответственно в точках K и M, стороны BC — в точке N. Известно, что середина P отрезка KM лежит на окружности (ABC). Докажите, что точки O, N, I лежат на одной прямой.

6. В окружность с центром в точке O вписан четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через A_D, A_C, B_D, B_C основания перпендикуляров из A на BC, из A на BD, из B на AC, из B на AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ соответственно. Докажите, что $A_CA_D \perp OH_A$ тогда и только тогда, когда $B_CB_D \perp OH_B$.

7. Suppose $ABCD$ is a parallelogram. Consider circles w_1 and w_2 such that w_1 is tangent to segments AB and AD and w_2 is tangent to segments BC and CD. Suppose that there exists a circle which is tangent to lines AD and DC and externally tangent to w_1 and w_2. Prove that there exists a circle which is tangent to lines AB and BC and also externally tangent to circles w_1 and w_2.

8. In cyclic quadrilateral $ABCD$, $AB > BC$, $AD > DC$, I, J are the incenters of $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ respectively. The circle with diameter AC meets segment IB at X, and the extension of JD at Y. Prove that if the four points B, I, J, D are concyclic, then X, Y are the reflections of each other across AC.