

Комбинаторная геометрия с акцентом на технику

21 сентября 2022 г.

1. На плоскости отмечены две системы точек: $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ с различными центрами масс. Докажите, что на плоскости существует точка P , что

$$|PA_1| + |PA_2| + \dots + |PA_n| = |PB_1| + |PB_2| + \dots + |PB_n|.$$

2. Большой прямоугольник разрезан на маленькие прямоугольники, у каждого из которых длина хотя бы одной из сторон — целое число. Докажите, что у большого прямоугольника длина хотя бы одной из сторон — целое число.

3. Для четырёхугольника $ABCD$ назовём квадрат *удачным*, если каждая из сторон квадрата (возможно, продолженная до прямой) проходит через хотя бы одну вершину четырёхугольника $ABCD$ и каждая из вершин четырёхугольника $ABCD$ принадлежит хотя бы одной стороне (или продолжению стороны) квадрата. Докажите, что для произвольного выпуклого четырёхугольника $ABCD$, диагонали и стороны которого попарно неперпендикулярны, существует не менее 6 удачных квадратов.

4. На плоскости нарисованы $n > 1$ окружностей равного радиуса так, что никакие две окружности не касаются и объединение всех окружностей образует связную фигуру. Для каждой пары окружностей отметим их точки пересечения синим. Докажите, что не менее n точек плоскости отмечены синим.

5. На плоскости отмечены n точек в *супер-общем положении*: никакие три не лежат на одной прямой, и никакие четыре — на одной окружности. Выпуклая оболочка этих точек изначально разрезана на треугольники с вершинами в отмеченных точках. За одну операцию разрешается выбрать в разрезании два смежных треугольника ABC и ADC с условием $\angle ABC + \angle ADC > 180^\circ$, стереть отрезок AC и нарисовать отрезок BD , тем самым получив новое разрезание на треугольники. Докажите, что (а) операции когда-нибудь закончатся; (б) финальная триангуляция не зависит от операций; (в) количество операций будет меньше $\frac{n(n-1)}{2}$.

6. Дан квадрат с зелеными и красными точками внутри, никакие три точки не лежат на одной прямой (включая вершины квадрата). Два верхние вершины квадрата — красные, два нижние — зеленые. Докажите, что можно некоторые пары красных точек соединить отрезками и некоторые пары зелёных точек соединить отрезками так, чтобы никакие два отрезка не имели общих внутренних точек и чтобы из любой точки можно было добраться по отрезкам до любой другой точки того же цвета.

7. Полоса Π , ограниченная двумя параллельными прямыми, разрезана на 10 одинаковых полос, шахматно раскрашенных в чёрный и белый цвета. Выпуклый многоугольник P вписан в полосу Π : лежит внутри и имеет общие точки с обеими граничными прямыми. Докажите, что не менее 45% площади многоугольника P закрашено в чёрный.

8. Докажите, что существует такое положительное число C , что как ни расположить на плоскости конечное число одинаковых квадратов 1×1 , в объединении образующих одну связную фигуру без дырок, отношение периметра фигуры к площади будет меньше C . (Квадратики — не обязательно параллельные копии друг друга.)