

Точка Микеля

Пусть a, b, c и d — четыре прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, и никакие две не параллельны. Эти прямые высекают на плоскости четыре треугольника, а четыре описанные около них окружности всегда пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Микеля* данной четверки прямых.

1. Прямые a, b, c и d общего положения высекают на плоскости выпуклый четырехугольник. Докажите, что противоположные стороны этого четырехугольника видны из точки Микеля под равными углами.
2. Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в точке O . Прямые AB и CD пересекаются в точке P , а прямые BC и AD — в точке Q , а прямые AC и BD — в точке R .
 - (a) Докажите, что точка Микеля M четверки прямых, содержащих стороны четырехугольника, лежит на прямой PQ .
 - (b) Докажите, что четырехугольники $MAOC$ и $MBOD$ — вписанные.
 - (c) Докажите, что $MO \perp PQ$.
 - (d) Покажите, что точка R лежит на прямой OM и выведите из этого, что $OR \perp PQ$.
 - (e) **Теорема.** Точка O является ортоцентром треугольника PQR .
 - (f) Обозначим за T вторую точку пересечения окружности (AMC) с прямой PQ . Покажите, что прямые TA и TC касаются ω .
3. На плоскости фиксирована окружность ω и точка R отличная от центра внутри нее. Рассматриваются отличные от трапеции вписанные в ω четырехугольники $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей P . Найдите ГМТ точек Микеля четверки AB, BC, CD, DA .
4. На плоскости дана окружность ω и точка P вне нее. Можно ли при помощи одной лишь линейки без делений построить касательную из P к ω ?
5. У четырехугольника $ABCD$ нет параллельных сторон. Докажите, что существует и единственная такая точка P , что основания ее проекций на стороны четырехугольника лежат на одной прямой.
6. Четыре прямые общего положения высекают на плоскости четыре треугольника. Докажите, что центры описанных около этих треугольников окружностей лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля этих прямых.
7. На плоскости даны пять прямых общего положения. Докажите, что пять точек Микеля всевозможных четверок этих прямых лежат на одной окружности.
8. Треугольник BAC остроугольный, окружность, проходящая через A, B пересекает CA, CB в точках B_1, A_1 соответственно. Пусть P — пересечение описанных окружностей треугольников ABC, A_1B_1C , а точка S — пересечение AA_1, BB_1 . Q, R — точки, симметричные S относительно CA, CB . Докажите, что точки C, P, Q, R лежат на одной окружности.
9. Четыре прямые общего положения высекают на плоскости четыре треугольника и выпуклый четырехугольник. Известно, что существует окружность, касающаяся всех четырех описанных около треугольников окружностей. Докажите, что существует окружность, касающаяся всех четырех прямых.