Комплексные координаты в геометрии

1. Убедитесь, что три точки a, b, c лежат на одной прямой, если и только если $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$. Также убедитесь, что четыре точки a, b, c, d лежат на одной обобщённой окружности если и только если $\frac{a-b}{a-c} / \frac{d-b}{d-c} \in \mathbb{R}$.
Может, это поможет решить задачу 11 из первого листка про комплексные числа?

Будем обозначать единичную окружность через Ω.

2. Проверьте следующие формулы: (и не забудьте их!)
(a) Уравнение прямой AB имеет вид $(\overline{b}-\overline{a})z + (a-b)\overline{z} = a\overline{b} - b\overline{a}$.
(b) Уравнение прямой, проходящей через точку C перпендикулярно AB имеет вид $(\overline{a}-\overline{b})z + (a-b)\overline{z} = (\overline{a}-\overline{b})c + (a-b)\overline{c}$.
(c) Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда уравнение прямой AB имеет вид $z + ab\overline{z} = a + b$.
(d) Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда уравнение перпендикуляра к прямой AB, проходящего через точку C, имеет вид $z - ab\overline{z} = c - ab\overline{c}$.
(e) Пусть $A, B \in \Omega$. Тогда касательные к Ω в точках A и B пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.
(f) . Пусть $A, B \in \Omega$. Если M — основание перпендикуляра из точки C на прямую AB, то $m = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c})$.
(g) Пусть $A, B \in \Omega$. Если M симметрична точке C относительно прямой AB, то $m = a + b - ab\overline{c}$.
(h) Пусть $A \in \Omega$, M — произвольная точка. Тогда прямая AM повторно пересекает Ω в точке $\frac{m-a}{1-a\overline{m}}$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.

4. Прямая t касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. K — проекция ортоцентра ABC на t, L — середина AC. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

5. Пусть четырёхугольник $ABCD$ — вписанный и пусть E и F — основания перпендикуляров из точки пересечения диагоналей AC и BD на стороны AB и CD, соответственно. Докажите, что EF перпендикулярна прямой, проходящей через середины сторон AD и BC.

6. Пусть I – центр вписанной окружности равнобедренного треугольника $ABC(AB = AC)$. Прямая BI пересекает AC в точке D, а перпендикуляр к AC, проходящий через точку D, пересекает AI в точке E. Докажите, что точка, симметричная I относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника BDE.

7. Пусть O — центр описанной оркужности треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку O, пересекает AB и AC в точках M и N, соответственно. Пусть S и R — середины отрезков BN и CM, соответственно. Докажите, что $\angle ROS = \angle BAC$.

8. Предположим, что вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R.
(a) Проверьте, что тогда центр описанной окружности ABC имеет координату $\dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(p+r)(q+r)}$.
(b) Проверьте, что центр окружности Эйлера имеет координату $\dfrac{(pq+pr+qr)^2}{(p+q)(p+r)(q+r)}$.
(c) Проверьте, что точка $f = \dfrac{pq+pr+qr}{p+q+r}$лежит на пересечении описанных окружностей треугольников PQR и окружности Эйлера треугольника ABC.
(d) **Теорема Фейербаха.** Докажите, что вписанная окружность касается окружности девяти точек.
Формулы в этой залаче приведены для самопроверки. Постарайтесь вывести их самостоятельно.

9. На высоте, опущенной из вершины A остроугольного треугольника ABC, выбрана такая точка K, что $AK = r$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим через A_1 точку касания вписанной окружности со стороной BC, а через F — точку Фейербаха. Докажитеl, что $\angle KFA_1 = \frac{\pi}{2}$.