

## Разной

### Алгебра

1. Последовательность  $(a_n)$  удовлетворяет соотношениям  $a_1 > 10$  и  $a_n = a_{n-1} + (n, a_{n-1})$  при  $n > 1$ . Известно, что в этой последовательности есть член, в два раза больший своего номера. Докажите, что таких членов бесконечно много.
2. Докажите, что все стозначные числа можно умножить на одно и то же натуральное число так, чтобы суммы цифр всех произведений были различными.
3. Дано бесконечное множество натуральных чисел  $M$ . Известно, что для любых двух различных чисел  $a, b \in M$  в множестве  $M$  также содержится хотя бы одно из чисел  $a^b - 2$  и  $a^b + 2$ . Докажите, что в  $M$  содержится хотя бы одно составное число.

### Комбинаторика

4. На шахматной доске стоят  $k$  ладей. Известно, что каждая клетка, на которой не стоит ладья, бьётся хотя бы тремя ладьями. Найдите наименьшее возможное значение  $k$ . (Ладья бьёт клетку, если они находятся в одной строке или одном столбце, а также между ними нет других ладей.)
5. Дан выпуклый 43-угольник. Все его стороны и диагонали покрасили в синий и красный цвета. При этом в каждой вершине сходятся 22 синих отрезка и 20 красных. Известно, что образовалось ровно 2022 треугольника, все стороны которых синие. Сколько образовалось треугольников, у которых все стороны красные?
6. Давид нарисовал на листочке 1000 равных окружностей. Оказалось, что никакие две окружности не касаются друг друга, и что каждая окружность пересекается хотя бы с тремя другими. Артем посчитал, сколько точек принадлежат хотя бы двум окружностям. Какое наименьшее число могло получиться у Артема?

### Геометрия

7. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Касательные к  $S_1$  и  $S_2$  в точке  $A$  пересекают отрезки  $BO_2$  и  $BO_1$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что  $KL$  параллельно  $O_1O_2$ .
8. Через точку  $K$ , лежащую вне окружности  $\omega$ , проведены касательные  $KB$  и  $KD$  к этой окружности ( $B$  и  $D$  – точки касания) и прямая, пересекающая окружность в точках  $A$  и  $C$ . Биссектриса угла  $ABC$  пересекает отрезок  $AC$  в точке  $E$  и окружность  $\omega$  в точке  $F$ . Докажите, что  $\angle FDE = 90^\circ$ .
9. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BB_1$ . Перпендикуляр из  $B_1$  на  $BC$  пересекает дугу  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Перпендикуляр из  $B$  на  $AK$  пересекает  $AC$  в точке  $L$ . Докажите, что точки  $K$ ,  $L$  и середина дуги  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , лежат на одной прямой.