Оценки в теории чисел

1. Натуральное число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (в частности, последняя цифра палиндрома совпадает с первой и потому не равна нулю). Квадраты двух различных натуральных чисел имеют по 1001 цифре. Докажите, что строго между этими квадратами на числовой прямой найдется палиндром.

2. Дано натуральное число N . На доске написаны числа от N^3 до N^3+N. Среди них a чисел покрасили в красный цвет, а какие-то b из остальных — в синий. Оказалось, что, что сумма красных чисел делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b.

3. Натуральные числа d и $d' > d$ — делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + d^2/n$.

4. Решите уравнение в натуральных числах $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

5. Найдите все пары натуральных чисел m, n такие, что m^4+m делится на m^2-n и n^4+n делится на n^2-m.

6. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2-1 = a^2(x^2-1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x?

7. На доске написали строку из ста попарно различных натуральных чисел. Затем под каждым числом написали сумму этого числа и НОДа всех остальных. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может оказаться в нижней строке?

8. Для натурального числа n обозначим через $C(n)$ сумму его различных простых делителей. Например, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Найдите все нечётные n такие, что $C(2^n+1) = C(n)$.