# Описанные окружности

**1.** **(a)** В треугольнике $ABC$ проведены вневписанные окружности $\omega_A$ (касается отрезка $BC$) и $\omega_C$ (касается отрезка $AB$). Пусть $\omega_A$ и $\omega_C$ касаются $AC$ в $P$ и $Q$. Докажите, что $PQ = BA + BC$.

**(b)** К двум непересекающимся окружностям проведены общие внешние касательные $a_1$ и $a_2$, и общие внутренние касательные $b_1$ и $b_2$. Докажите, что тогда длины отрезков прямых $b_1$ и $b_2$, заключённые между прямыми $a_1$ и $a_2$, равны длинам отрезков общих внешних касательных, заключённых между точками касания.

**2.** На стороне $AC$ выбрана произвольная точка $B_1$. В треугольники $ABB_1$ и $CBB_1$ вписаны окружности $a$ и $c$ и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от $AC$. Эта касательная пересекает отрезок $BB_1$ в точке $K$. Докажите, что длина отрезка $BK$ не зависит от выбора точки $B_1$.

**3.** Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Докажите, что точка пересечения диагоналей, центр вписанной окружности треугольника $ABC$ и центр вневписанной окружности треугольника $CDA$, касающейся стороны $AC$, лежат на одной прямой.

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ провели высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. На отрезках $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ отметили соответственно точки $A_2, B_2, C_2$ так, что $\angle BA_2C = \angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Отрезки $AC_2$ и $A_2C$ пересекаются в точке $B_3$, отрезки $CB_2$ и $B_2C$ — в точке $A_3$, отрезки $BA_2$ и $B_2A$ — в точке $C_3$. Докажите, что в шестиугольник $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ можно вписать окружность.

**5.** Пусть $ABC$ — треугольник с центром в центре $I$. Пусть $D$ — точка на стороне $BC$, а $\omega_B$ и $\omega_C$ — вписанные окружности $ABD$ и $ACD$ соответственно. Пусть $\omega_B$ и $\omega_C$ касаются отрезка $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Пусть $P$ — пересечение отрезка $AD$ с прямой, соединяющей центры $\omega_B$ и $\omega_C$. Пусть $X$ — точка пересечения прямых $BI$ и $CP$, а $Y$ — точка пересечения прямых $CI$ и $BP$. Докажите, что прямые $EX$ и $FY$ пересекаются на вписанной окружности $ABC$.

**6.** Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Пусть $g$ — прямая, проходящая через $A$, пересекающая отрезок $BC$ в $M$ и прямую $CD$ в $N$. Обозначим через $I_1$, $I_2$ и $I_3$ центры вписанных треугольников $ABM$, $MNC$ и $NDA$ соответственно. Докажите, что ортоцентр $I_1I_2I_3$ лежит на $g$.

**7.** Пусть $ABCD$ — описанная трапеция с основаниями $AB$ и $CD$. Пусть $P$ — произвольная точка такая, что $PD$, $PC$ пересекаются со стороной $AB$ в точках $Q, R$ соответственно. Пусть $J$ — точка касания вписанной окружности треугольника $PCD$ с $CD$. Докажите, что $IJ \perp KL$, где $K, L$ и $I$ — центры вписанных окружностей $QAD$, $RBC$ и $ABCD$ соответственно.