

Поиск идей в геометрических неравенствах

1. (а) Докажите, что длина биссектрисы треугольника не превосходит длины выходящей из этой же вершины медианы.

(b) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Биссектриса угла APB пересекает отрезки AB и CD в точках X и Y . Точки M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что

$$2XY \leq 2MN \leq BC + AD$$

2. Внутри угла с вершиной в точке A отмечена точка P . На сторонах угла выбираются такие точки B и C , что точка P лежит на отрезке BC . Как минимизировать (а) Площадь треугольника ABC ? (b) Периметр треугольника ABC ?

3. Окружность ω вписана в треугольник ABC , касаясь его сторон AB и AC в точках P и Q . Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок PQ в точке S . Докажите, что $\angle BSC$ — тупой.

4. Сумма длин некоторых векторов равна 4. Докажите, что среди них можно выбрать несколько, длина суммы которых не меньше 1.

5. (а) В треугольнике ABC угол при вершине A равен 120° . Докажите, что $AC + 2AB < 2BC$.

(b) В остроугольном треугольнике ABC отмечена точка T , из которой каждая сторона треугольника видна под углом 120° . Докажите, что

$$2AB + 2BC + 2CA > 4AT + 3BT + 2CT$$

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\sqrt{2} \cdot AC = AB + CD$ и $\sqrt{2} \cdot BD = BC + AD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.