

Неравенство Коши и алг. преобразования

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + 1.$$

2. Найдите наибольшее k такое, что $x^4 - kx^3 + 27 \geq 0$ при любом действительном x .

3. Для любых действительных чисел x и y неравенство

$$(x^2 + y^2)^2 \geq 8(x - y)^2 xy.$$

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 9.$$

5. Для положительных чисел докажите неравенство:

$$\frac{1}{x + 2y} + \frac{1}{y + 2z} + \frac{1}{z + 2x} \geq \frac{3}{x + y + z}.$$

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + a^2 + (b + 1)^2} + \frac{1}{1 + b^2 + (c + 1)^2} + \frac{1}{1 + c^2 + (a + 1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

7. На плоскости даны точки X и Y . Назовём точку C хорошей, если в некотором треугольнике с вершиной C для каждой из точек X и Y расстояние от неё до C равно сумме расстояний от неё до двух других вершин треугольника. Под каким наибольшим углом отрезок XY может быть виден из хорошей точки?

8. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2}.$$