Найти точку

1. Пусть в остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в H. Пусть A_0 — середина AA_1, C_0 — середина CC_1. Докажите, что B_1, H, A_0 и C_0 — лежат на одной окружности.

2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Через точку C_1 проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая l касается окружности, описанной около треугольника B_1OC.

3. Пусть D — середина меньшей дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники BAD и CAD. Докажите, что одна из общих касательных к ним параллельна BC.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, и пусть P — точка на стороне AB. Диагонали AC пересекают отрезки DP в точке Q. Прямая, проходящая через P, параллельная CD, пересекает продолжение стороны CB за B в точке K. Прямая, проходящая через Q, параллельная BD, пересекает продолжение стороны CB за B в точке L. Докажите, что описанные окружности треугольников BKP и CLQ касаются.

5. В остроугольном $\triangle ABC$ проведены высоты BH_b и CH_c. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точках P и Q. Точка B_1 симметрична точке B относительно AC, C_1 симметрична точке C относительно AB. Докажите, что точки B_1, C_1, P и Q лежат на одной окружности.

6. Дана окружность ω с центром O. Прямая PK касается окружности ω в точке K. Пусть Q — проекция точки K на OP. Через точку Q проведена прямая, пересекающая PK в точке R, а серединный перпендикуляр к PQ — в точке M. Докажите, что описанная окружность треугольника PMR касается ω.

7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $BA \neq BC$. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC обозначим через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, касающаяся луча BA за точкой A и луча BC за точкой C, которая также касается прямых AD и CD. Докажите, что

   (a) одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается ω_2;

   (b) общие внешние касательные к ω_1 и ω_2 пересекаются на ω.

8. Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B. Пусть M — середина дуги AB окружности ω (M лежит внутри Ω). Хорда MP окружности ω пересекает Ω в точке Q (Q лежит внутри ω). Пусть l_P — касательная к ω в точке P, а l_Q — касательная к Ω в точке Q. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми l_P, l_Q и AB, касается Ω.

9. В треугольнике ABC выбираются точки P и Q. Прямые AQ, BQ и CQ пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Оказалось, что прямые PA_1, PB_1 и PC_1 перпендикулярны сторонам BC, AC и AB соответственно. Докажите, что на прямой PQ лежит центр описанной окружности треугольника ABC.