Корни из единицы

1. Пусть многочлен $P(x^n)$ делится на $x-1$. Докажите, что $P(x^n)$ делится на x^n-1.

2. Пусть $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ — все корни степени n из 1. Докажите, что среди них можно выбрать корень ω такой, что для любого ω_i найдется целое число k такое, что $\omega_i = \omega^k$. Сколько существует таких корней?

3. Пусть $1 = w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ — все корни степени n из 1. Вычислите

(a) $w_0 + w_1 + \ldots + w_{n-1}$;

(b) $w_0^k + w_1^k + \ldots + w_{n-1}^k$, где $k < n$;

(c) $(1-w_1)\ldots(1-w_{n-1})$

4. В окружность радиуса 1 вписан правильный n-угольник. Найдите

(a) произведение длин всех его сторон и диагоналей.

(b) сумму квадратов длин всех его сторон и диагоналей.

5. Вычислите

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{2k} + \ldots$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{4k} + \ldots$

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{3k} + \ldots$

6. Запишите в замкнутом виде (без знака сигма и многоточий)

(a) $\sin(x) + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$

(b) $\cos(x) + 2\cos(2x) + 3\cos(3x) + \ldots + n\cos(nx)$

(c) $\sin(x) + \binom{n}{1}\sin(2x) + \binom{n}{2}\sin(3x) + \ldots + \binom{n}{n}\sin(n+1)x$

7. **Преобразование Фурье.** Рассмотрим корень из единицы $\xi = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$. Многочлен $P(x)$ степени $n-1$ принимает значения $a_0, \ldots, a_{n-1}$ в точках $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$, соответственно. Докажите, что коэффициент $P(x)$ при x^k равен $\frac{1}{n}(a_0 + a_1\overline{\xi^k} + a_2\overline{\xi^{2k}} + \ldots + a_{n-1}\overline{\xi^{(n-1)k}})$.

8. Дано нечётное число n. Пусть $\omega \neq 1$ — корень n-ной степени из единицы. Обозначим через S_n число $1 + \omega + \omega^4 + \ldots + \omega^{(n-1)^2}$.

(a) Докажите, что $|S_n| = \sqrt{n}$

(b) Пусть $n = p$ — простое число. Докажите, что $S_n^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$.

9. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

Указание. Рассмотрим вершины правильного многоугольника как комплексные корни из 1 степени n. Теперь переформулируйте задачу на языке многочленов. Для этого множеству точек данного цвета сопоставьте многочлен со старшим коэффициентом 1, множеством корней которого служит это множество точек.