Комплексные числа. Продолжение

1. Докажите, что каждое комплексное число $z \neq 0$ однозначно представимо в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r > 0$ и φ определяется с точностью до 2π. Убедитесь, что в таком случае $r = |z|$.

Угол φ называется *аргументом* числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записывают как $\mathrm{Arg}(z) = \varphi$. В свою очередь, r — это модуль $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

2. Докажите, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

3. Докажите, что $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

4. Вычислите **(a)** $(i+1)^{100}$; **(b)** $(i - \sqrt{3})^{100}$

5. Сколько решений имеет уравнение $(z-i)^{2023} + (z+i)^{2023} = 0$?

6. С помощью арифметических операций и сопряжения, задайте следующие преобразования комплексной плоскости:

(a) отражение относительно прямой $y = x$.

(b) поворот на 60° вокруг нуля (против часовой стрелки);

(c) поворот на 45° вокруг точки $(2, 3)$;

(d) инверсию с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом 1.

(e) инверсию с центром в точке $(1, 1)$ и радиусом 2.

7. Как с помощью арифметических операций задать произвольную поворотную гомотетию? С помощью этого докажите, что композиция поворотных гомотетий — это или поворотная гомотетия, или параллельный перенос.

8. Пусть $M \subset \mathbb{C} \backslash \{0\}$ — множество, удовлетворяющее свойству: если $x, y \in M$, то $\frac{x}{y} \in M$. Известно, что M состоит из n элементов. Найдите M.

9. Многочлен $P(x)$ разложили на множители как $a(x-z_1)\ldots(x-z_n)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа. Рассмотрим *производную* $P(x)$: многочлен

$$P'(x) = a(x-z_1)\ldots(x-z_n)\left(\frac{1}{x-z_1} + \ldots + \frac{1}{x-z_n}\right).$$

Пусть $P'(z) = 0$. Докажите, что z лежит внутри (или на границе) треугольника, образованного какими-то тремя из точек $z_1, \ldots, z_n$.