# Комплексные числа. Начало

*Комплексными числами* называют пары действительных чисел $(a, b)$ с заданными на них операциями сложения и умножения:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \ \ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2).$$

В частности, комплексные числа можно представлять себе как точки на плоскости.

**1.** **(a)** Проверьте, что сложение и умножение коммутативны и ассоциативны. Убедитесь, что $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$ и $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

**(b)** Как устроены обратные к ним операции: вычитание и деление? Докажите, что можно делить на любое комплексное число, не равное $(0, 0)$.

Отождествим вещественное число $a$ с комплексным числом $(a, 0)$. Таким образом, мы можем воспринимать вещественные числа как подмножество комплексных.

**2.** Проверьте, что сложение и умножение при этом получаются такие же, как мы привыкли.

Обозначим через $i$ комплексное число $(0, 1)$. Ясно, что $i^2 = -1$. Заметим, что любое комплексное число можно единственным образом записать в виде $a+b\cdot i = (a, b)$, где $a, b$ — действительные числа. Начиная с этого момента мы будем записывать комплексные числа именно так. Говорят, что $a$ — это вещественная часть числа $a+bi$, а $b$ — мнимая: $\mathrm{Re}(a + bi) = a$, $\mathrm{Im}(a + bi) = b$

**3.** Вычислите $\dfrac{(1 + 3i)(1 - 4i) + 7 + i}{2 + i}$

**4.** **(a)** Решите уравнение $z^2 = 3 + 4i$.

**(b)** Решите уравнение $z^2 - (2i + 2)z + (2i - 1) = 0$.

**(c)** Докажите, что у любого многочлена степени 2 с комплексными коэффициентами есть комплексный корень.

Назовём *комплексно сопряженным* к числу $a + bi$ число $a - bi$. Будем обозначать комплексно сопряженное к числу $z$ через $\overline{z}$. Назовём *модулем* комплексного числа $a + bi$ число $\sqrt{a^2 + b^2}$.

**5.** Докажите, что

**(a)** число $z$ вещественное тогда и только тогда, когда $z = \overline{z}$;

**(b)** $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

**(c)** Докажите, что $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

**(d)** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

**(e)** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

**6.** Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$.

**7.** Докажите, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

**8.** Про комплексные числа $x, y, z$ известно, что $|x| = |y| = |z| = 1$ Какие значения может принимать выражение $|\frac{x+y+z}{xy+yz+xz}|$?

**9.** Нарисуйте на плоскости множества **(a)** $\mathrm{Im}(z) = 2$; **(b)** $2z + \overline{z} = 1 + i$; **(c)** $|\frac{z-2i}{z+4}| \geqslant 1$; **(d)** $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) = 0$.

**10.** Дано уравнение $az \cdot \overline{z} + bz + c\overline{z} + d = 0$. Известно, что $a = \overline{a}$, $b = \overline{c}$ (и $c = \overline{b}$), $d = \overline{d}$. Как может выглядеть множество решений этого уравнения?

**11.** Докажите, что для любых комплексных чисел $a, b, c, d$ таких, что $ad \neq bc$, преобразование $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит обобщённые окружности в обобщённые окружности.