# Комбинаторный разнобой

**1.** По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

**2.** Из клетчатого бумажного квадрата $100 \times 100$ вырезали по границам клеток 1950 двуклеточных прямоугольников. Докажите, что из оставшейся части можно вырезать по границам клеток четырехклеточную фигурку «Т-тетрамино» (возможно, повернутую). (Если такая фигурка уже есть среди оставшихся частей, считается, что ее получилось вырезать.)

**3.** На окружности отмечены 100500 точек, делящих ее на равные дуги. Из них выбрали $k$ точек и построили выпуклый $k$-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем $k$ могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

**4.** На прямоугольном столе можно расположить без наложений $N$ монет радиуса 2. Верно ли, что на этом столе можно расположить без наложений $4N$ монет радиуса 1?

**5.** На столе лежит куча из более, чем $n^2$ камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, причем первым берет Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее $n$, либо любое число камней, делящееся на $n$, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

**6.** Найдите наибольшее возможное количество единичных полукругов на плоскости, границы любых двух из которых пересекаются ровно в 6 точках.

**7.** На окружности отметили $n$ точек, разбивающих ее на $n$ дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $\frac{360^\circ \cdot k}{n}$, в результате чего они перешли в $n$ новых точек, разбивающих окружность на $n$ новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг.

**8.** Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?