Графы

1. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?

2. В стране $n > 2$ городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n-1$ — точный квадрат.

3. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до n. Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины i и j смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдется либо вершина номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

5. В графе G степень каждой вершины не превосходит 2022. Докажите, что ребра графа можно покрасить в 11 цветов так, что графы, образованные ребрами каждого цвета, двудольные.

6. На вечеринку пришли n человек, для любых двух найдется отличный от них, который с ними знаком. Какое минимальное количество пар знакомых может быть?

7. Связный граф на n вершинах обладает таким свойством, что при удалении ребер любого цикла связность нарушается. Какое максимальное число ребер в нем может быть (в зависимости от n)?

8. Из каждого города в другие города страны ведут ровно 5 дорог. Докажите, что две компании могут так приватизировать эти дороги, что из каждого города будут выходить 2 дороги одной и 3 дороги другой компании.