Выпуклые функции в неравенствах.

1. **Неравенство о средних с весами.** Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и неотрицательных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ докажите неравенство:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \geqslant (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}$$

2. $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geqslant a^a b^b c^c$$

3. **(a)** Докажите, что функция $f(x) = x^2$ выпукла вниз на любом отрезке $[a, b]$.

(b) При помощи неравенства Йенсена докажите КБШ:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2 + \ldots ...y_n^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

4. a, b и c стороны треугольника.

$$\sqrt{a}(a+c-b) + \sqrt{b}(b+a-c) + \sqrt{c}(c+b-a) \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$$

5. α, β и γ углы треугольника.

(a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(b) $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$

6. **(a)** **Неравенство Бернулли.** Пусть $r \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 1$, а $x \geqslant 0$. Тогда $(1+x)^r \geqslant 1+rx$

(b) Пусть $f(x) = x^r$ при $r \in \mathbb{Q}$. Покажите, что при $r > 1$ и $r < 0$ функция f выпукла вниз, а при $r \in [0, 1]$ она выпукла вверх.

(c) **Неравенство Коши.** $x_1, x_2, \ldots x_n \geqslant 0$. Для рационального числа $p \neq 0$ положим $S_p = \left(\dfrac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$. Докажите, что при $p > q$ $S_p \geqslant S_q$.

7. $a, b, c > 0$

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}$$

8. $p \geqslant 1, q \in \mathbb{Q}^+$; $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

(a) **Неравенство Гельдера.**

$$(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(b) **Неравенство Минковского.**

$$(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} + (y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant ((x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$