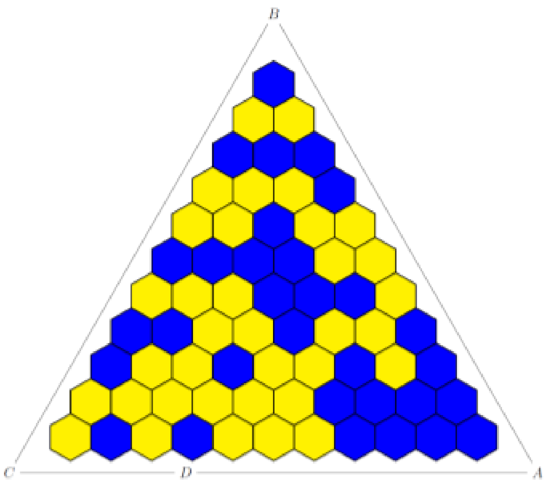
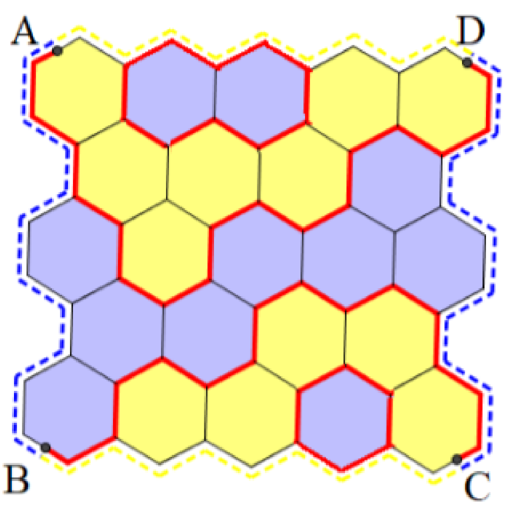
Вода точит камень

Рассмотрим простую модель протекания воды через пористую породу. Для этого представим, что порода — это замощение плоскости правильными шестиугольниками, причем некоторые из них пропускают воду (синие), а некоторые нет (желтые). Камнем будем считать набор шестиугольников, попавший внутрь какого-то многоугольника. Вода может протекать из одной части камня в другую только по шестиугольникам, пропускающим воду. Нас будет интересовать вероятность протекания воды из одной области в другую, то есть, доля раскрасок этого набора шестиугольников, в которых из одной области можно добраться в другую по синим шестиугольникам. Более того, математиков интересует не столько эта величина, сколько ее предел при уменьшении стороны шестиугольника. Для частного случая есть интутивное, но сложно доказуемое утверждение, мы обсудим некоторые идейные моменты, связанные с его доказательством.

Теорема. Пусть M — правильный треугольник со стороной 1 и вершинами A, B, C, а точка D лежит на стороне AC. Тогда с уменьшением шестиугольной решетки вероятность того, что вода протекает между отрезками AB и CD стремится к $|CD|$.



Рассмотрим многоугольник M, составленный из шестиугольников, точки A, B, C, D, лежащие на его границе именно в таком порядке против часовой стрелки. Зафиксируем некоторую его раскраску. Если два соседних шестиугольника разного цвета, раскрасим в красный их общую сторону. Также отметим красным некоторые стороны шестиугольников, лежащие на границе M. На участках границы AB и CD будем отмечать второны синих шестиугольников, а научастках BC и DA — желтых (см. рисунок).



1. Нарисуйте многоугольник, состоящий из хотя бы четырех шестиугольников, и найдите вероятность протекания между такой парой его сторон, что от одной до другой можно добраться пройдя не менее трех шестиугольников.

2. **(a)** Нарисуйте красные отрезки на картинке из предыдущей задачи.

(b) Докажите, что красные отрезки всегда образуют ровно две ломаные с концами в точках A, B, C, D плюс несколько замкнутых ломаных.

(c) Докажите, что исходная раскраска однозначно восстанавливается по набору красных отрезков.

Определение. *Конфигурация петель* с особенностями в A, B, C, D — это объединение нескольких непересекающихся ломаных, из которых ровно две имеют концы в точках A, B, C, D, а остальные замкнуты.

Обозначим через $P(D \leftrightarrow A)$ долю таких конфигураций петель с особенностями A, B, C, D, что точка D соединена ломаной с A. Будем считать, что $P(A \leftrightarrow A) = 1$.

3. Выразите $P(D \leftrightarrow A)$ через вероятность протекания между ломаными AB и CD. Обобщите этот результат на случай, когда D принадлежит ломаным AB или BC.

Теперь будем считать, что A, B, C лежат на границе многоугольника M (все еще в этом же порядке против часовой стрелки), а D расположена внутри или на границе. Будем также считать, что A, B, C, D — середины сторон шестиугольников, и эти четыре точки различны. В этом случае конфигурация петель и доли $P(D \leftrightarrow A), P(D \leftrightarrow B), P(D \leftrightarrow C)$ определяются дословно так же, как и раньше.

Введем функцию $f(D) = P(D \leftrightarrow A) + \tau P(D \leftrightarrow B) + \tau^2 P(D \leftrightarrow C)$, где $\tau = -1/2 + i\sqrt{3}/2$.

4. **(a)** Пусть z — общая вершина трех шестиугольников из M. Пусть p, q, r — середины их общих сторон, перечисленные в порядке против часовой стрелки. Докажите *тождество треугольника* и объясните, каков его геометрический смысл.

$$(p - z)f(p) + (q - z)f(q) + (r - z)f(r) = 0.$$

(b) Рассмотрим цепочку из k шестиугольников из M в которой соседние шестиугольники имеют общую сторону, и последний имеет общую сторону с первым. Обозначим через $w_1, \dots w_k$ центры этих шестиугольников и положим $W_{k+1} = w_1$ Тогда если $f(z)$ — любая функция, удовлетворяющая тождеству треугольника, то

$$\sum_{j=1}^{k} f\left(\frac{w_{j+1} + w_j}{2}\right)(w_{j+1} - w_j) = 0.$$

(c) Найдите все тройки комплексных чисел a, b, c такие, что для любых M, A, B, C функция $f(D) = aP(D \leftrightarrow A) + bP(D \leftrightarrow B) + cP(D \leftrightarrow C)$ удовлетворяет тождеству треугольника.

5. **(a)** Найдите максимум $|f(D)|$ по всем D.

(b) Пусть D расположена на границе многоугольника M. Обойдем границу против часовой стрелки и запишем порядок точек A, B, C, D. Докажите следующее равенство и объясните, что оно означает геометрически.

$$f(D) \in \begin{cases} [1; \tau^2] & \text{если получился порядок } A, B, C, D, \\ [\tau^2; \tau] & \text{если получился порядок } A, B, D, C, \\ [\tau; 1] & \text{если получился порядок } A, D, B, C. \end{cases}$$