

Тренировочная олимпиада

1. Витя нарисовал на доске график квадратного трёхчлена $f(x)$. Оказалось, что график многочлена $f(x) - (f(x))^5$ пересекает ось абсцисс ровно в трёх точках. Найдите ординату вершины $f(x)$.
2. Пусть n — целое число, большее 10, все цифры которого принадлежат множеству $\{1, 3, 7, 9\}$. Докажите, что у n есть простой делитель, не меньший 11.
3. Клетки квадрата 50×50 раскрашены в четыре цвета. Докажите, что существует клетка, с четырёх сторон от которой (т.е. сверху, снизу, слева и справа) имеются клетки одного с ней цвета (не обязательно с ней соседние).
4. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC . Точки S_B и S_C — середины меньших дуг AC и AB окружности ω соответственно. Окружность Ω_B с центром в точке S_B касается прямой AC , окружность Ω_C с центром в точке S_C касается прямой AB . Прямая l_a — общая внешняя касательная к окружностям Ω_B и Ω_C , относительно которой точка B и точка S_B лежат в разных полуплоскостях. Аналогично определяются прямые l_b и l_c . Докажите, что три такие прямые пересекаются в одной точке.
5. Рассматриваются произвольные перестановки (a_1, \dots, a_{2023}) натуральных чисел от 1 до 2023. Для каждой такой перестановки посчитали сумму $\left[\frac{a_1}{1}\right] + \dots + \left[\frac{a_{2023}}{2023}\right]$ (через $[x]$ обозначена целая часть x). Какой минимальный результат мог получиться?