Тренировочная олимпиада

1. На доске 12×12 расставлено несколько ладей, которые бьют всю доску. При этом каждая ладья бьёт не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k можно заведомо утверждать, что в каждом квадрате $k \times k$ стоит хотя бы одна ладья?

2. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа

$$n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1.$$

Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

3. Найдите все действительные числа t такие, что для любых a, b, c, являющихся сторонами треугольника, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ тоже являются сторонами треугольника.

4. Дано натуральное число n. Найдите количество перестановок a_1, a_2, $\ldots a_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n удовлетворяющих неравенствам $a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \cdots \leq na_n$.

5. Докажите, что выпуклый четырёхугольник можно разрезать на пять многоугольников, каждый из которых имеет ось симметрии.