# Производная многочлена

В этом листке многочлен — это многочлен над произвольным полем (можно считать, что это многочлен над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{F}_p$).

**Определение.** *Производной* многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ называется многочлен

$$P'(x) = a_n \cdot nx^{n-1} + \ldots + a_k \cdot kx^{k-1} + \ldots + a_1.$$

*Второй (аналогично, третьей, …, $k$-ой) производной* $P(x)$ называют многочлен $P^{(2)}(x) := (P'(x))'$ (аналогично, $P^{(3)}(x) := ((P'(x))')'$ и так далее).

**1.** Вычислите
**(a)** $P'(x)$, где $P(x) = \frac{x^7-1}{x-1} \in \mathbb{R}[x]$;
**(b)** $P^{(5)}(x)$, где $P(x) = x^{10} + i \cdot x^3 - 4 \in \mathbb{C}[x]$;
**(c)** $P^{(25)}(x)$, где $P(x) = x^{11} - x^5 + 8 \in \mathbb{Q}[x]$;
**(d)** $P^{(11)}(x)$, где $P(x) = x^{11} - x \in \mathbb{F}_{11}[x]$;
**(e)** $P^{(5)}(x)$, где $P(x) = (x+1)^{10} \in \mathbb{Q}[x]$.

**2.** Докажите следующие свойства производной.
**(a)** $(P(x) \pm Q(x))' = P'(x) \pm Q'(x)$;
**(b)** если $c$ — число, то $(cP(x))' = c \cdot P'(x)$;
**(c)** $(P(x)Q(x))' = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x)$;
**(d)** $P(Q(x))' = P'(Q(x)) \cdot Q'(x)$.

**3.** Докажите, что если $P(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_n)$, то $P'(x) = P(x)(\frac{1}{x-a_1} + \ldots + \frac{1}{x-a_n})$.

**4.** Дано число $a$. Верно ли, что если для многочленов $P(x)$ и $Q(x)$

$$P(a) = Q(a), P'(a) = Q'(a), \ldots, P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a), \ldots,$$

то $P(x) = Q(x)$? Уточните это утверждение и докажите его.

**5.** **Формула Тейлора.** Многочлен $P(x)$ имеет степень $n$. Докажите, что

$$P(a+x) = P(a) + xP'(a) + \ldots + \frac{x^k}{k!}P^{(k)}(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

**6.** Даны произвольные числа $a, b_0, \ldots, b_n$. Докажите, что существует (единственный?) многочлен $P(x)$ степени, не превосходящей $n$, такой, что

$$P(a) = b_0, P'(a) = b_1, \ldots, P^{(n)}(a) = n! \cdot b_n.$$

**7.** Напомним, что $a$ является корнем $P(x)$ *кратности* $k$, если $P(x)$ делится на $(x-a)^k$ и не делится на $(x-a)^{k+1}$.

**(a)** Пусть поле — это $\mathbb{C}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Докажите, что если $a$ — корень $P(x)$ кратности $k \geqslant 1$, то $a$ — корень $P'(x)$ кратности $k-1$.

**(b)** Докажите, что если НОД$(P(x), P'(x)) = 1$, то многочлен $P(x)$ не имеет кратных корней.

**8.** Докажите, что многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

**9.** Докажите, что если многочлен $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то у него не может быть кратных иррациональных (и даже кратных комплексных) корней.

**10.** Существует ли пара многочленов с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степени выше первой, удовлетворяющих тождеству $P(Q(x)) = x^{100} - 7x + 2023$?

**11.** Обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_n$ корни из единицы степени $n$. Вычислите

$$\frac{1}{1+\omega_1} + \frac{1}{1+\omega_2} + \cdots + \frac{1}{1+\omega_n}.$$