Поворотная гомотетия

1. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

2. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0. Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

3. Стороны AB и CD четырехугольника ABCD пересекаются в точке O. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCO, ADO и MNO лежат на одной прямой.

4. Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120^\circ$. Вне треугольника ABC взята такая точка E, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60^\circ$ и точки B и E находятся в разных полуплоскостях относительно AC. Докажите, что $\angle AFD = 90^\circ$, где F — середина отрезка BE.

5. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно начали движение из точки P против часовой стрелки с равными угловыми скоростями два велосипедиста A и B. **(a)** Докажите, что прямая AB все время проходит через точку Q. **(b)** Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и треугольнику PO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей. **(c)** Найдите геометрическое место середин отрезков AB. **(d)** Докажите, что A и B все время равноудалены от некоторой фиксированной точки.

6. Даны четыре прямые общего положения, то есть образующие в пересечение друг с другом четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих четырёх треугольников пересекаются в одной точке.

7. Окружность с центром O проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC повторно в точках K и N соответственно. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и KBN (отличная от B). Докажите, что $\angle OMB = 90^\circ$.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = \alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.