Комплексная добавка

1. Треугольник ABC вписан в единичную окружность ω с центром в нуле на комплексной плоскости.

(a) Докажите, что найдутся такие комплексные числа a, b и c, что комплекнсые координаты вершин треугольника это a^2, b^2 и c^2, а комплексные координаты середин «меньших» дуг это $-bc$, $-ca$ и $-ab$, а комплексные координаты середин «больших дуг» это bc, ca и bc.

(b) В обозначениях предыдущей задачи покажите, что комплексная координата центра вписанной окружности это $-ab-bc-ca$. А какие координаты у центров вневписанных окружностей?

(c) Выразите через a, b и c комплексную координату точки касания полувписанной окружности треугольика с ω.

2. Окружность с центром в точке I вписана в треугольник ABC. Луч AI второй раз пересекат окружность (ABC) в точке A_1. Точка A_2 симметрична точке A_1 относительно BC, точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что I — ортоцентр треугольника $A_2B_2C_2$.

3. Дан треугольник ABC с $\angle A = 60^\circ$. Точки P и Q выбираются на лучах BA и CA соответсвенно так, что $BP = BC = CQ$. Докажите, что прямая PQ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.