

Комбинаторная геометрия. Принцип крайнего

1. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым количеством вершин.
2. На плоскости отмечено несколько точек, причем не все эти точки лежат на одной прямой. Вокруг каждого треугольника с вершинами в отмеченных точках описана окружность. Могут ли центры всех этих окружностей оказаться отмеченными точками?
3. Можно ли на плоскости расположить 2023 отрезка так, чтобы каждый отрезок обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?
4. (a) Докажите, что внутри выпуклого многоугольника площади 1 есть треугольник площади не меньше, чем $1/4$.
(b) Дано 100 точек, причём площадь никакого треугольника с вершинами в них не превосходит 1. Докажите, что все точки можно покрыть треугольником площади 4
5. Несколько прямых общего положения делят плоскость на части (никакие две прямые не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке). Докажите, что к каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник.
6. Дан выпуклый многоугольник площади 1.
(a) Докажите, что существует прямоугольник площади 2, в котором данный многоугольник полностью содержится;
(b) Докажите, что существует прямоугольник площади $1/8$, который целиком содержится в данном многоугольнике.
7. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Доказать, что найдется отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющих общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух.