Инверсия + симметрия

1. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что существует композиция инверсии с центром в P и симметрии относительно биссектрисы угла APD, меняющая местами противоположные вершины трапеции. Придумайте, как перефоомулировать этот факт, если точка P это пересечение диагоналей трапеции.

2. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали — в точке R. Обозначим за M вторую точку пересечения окружностей (APC) и (BPD). Докажите, что $\angle APR = \angle DPM$.

3. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначим за Q и R центр описанных окружностей треугольников ABC и ADC соответсвенно. Докажите, что $\angle APQ = \angle CPR$.

4. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Прямая ℓ, параллельная стороне BC, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q, а ω — в точках X и Y, так, что точка P лежит на отрезке XQ. Докажите, что окружости, вписанные в маленькие криволинейные треугольники XPB и YQC видны из точки A под равными углами.

5. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции пересекаются в точке S. Точки X и Y на биссектрисе $\angle ASD$ таковы, что $\angle AXC - \angle AYC = \angle ASC$. Докажите, что $\angle BXD - \angle BYD = \angle BSD$

6. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AD — точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF. Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE.