Функция Мёбиуса

Напомним, что функция Мёбиуса определяется на натуральных числах по следующему правилу:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 p_2 \dots p_k, p_i \text{ — различные простые числа} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. **(a)** *(напоминание)* Докажите, что при $n > 1$ выполняется $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

(b) Пусть функция f такова, что $f(1) = 1$ и для всех $n > 1$ выполняется $\sum_{d|n} f(d) = 0$. Правда ли, что $f(n) = \mu(n)$ для всех n?

2. *(Формула обращения Мёбиуса, напоминание)*

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ таке функции, что $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$. Докажите, что тогда

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

3. Для всех n найдите сумму $\sum_{d|n} \mu(d) \ln d$.

4. Дан алфавит из r символов. Словом длины n в алфавите назовем последовательнот $a_1 a_2 \dots a_n$, где a_i — символы из алфавита. Циклическим словом назовем класс слов, получающихся друг из друга циклическим сдвигом. Например, в алфавите из букв {Ж, А, Б} слова «ЖАБА», «АБАЖ», «БАЖА» и «АЖАБ» соответствуют одному циклическому слову. Положим $T_n(r)$ — число различных циклических слов длины n в алфавите из r символов.

(a) Назовем периодом циклического слова такое минимальное d, что после d циклических сдвигов на 1 символ слово переходит в себя. Докажите, что любое слово длины n с периодом d имеет вид $a_1 a_2 \dots a_d a_1 \dots a_d \dots a_1 \dots a_d$, то есть, состоит из n/d блоков вида $a_1 \dots a_d$.

(b) Заметим, что над алфавитом из r символов r^n слов длины n. Зафиксируем r. Пусть $m_n(d)$ — число циклических слов, получаемых из слов периода d.

Выразите r^n через $d_1, \dots, d_k, m_n(d_1), \dots m_n(d_k)$, где d_i — делители n.

(c) Докажите, что $T_r(n) = \sum_{m|n} \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d) r^{\frac{m}{d}}$

(d) Докажите, что $T_r(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) r^{\frac{n}{d}}$

Обобщим понятие функции Мёбиуса. Рассмотрим ориентированный граф G без циклов. Будем говорить, что веришна x предшествует веришне y (пишут $x \preceq y$), если существует ориентированный путь из y в x. В частности, $x \preceq x$. Определим $\mu(x, y)$ для всех $x \preceq y$ следующим образом:

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ -\sum_{x \preceq z \preceq y, z \neq y} \mu(x, z), & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

5. Докажите, что новое определение согласуется с предыдущим, а именно, что если рассмотреть граф, вершинами которого являются натуральные числа, а ребро из y в x проводится, если x делит y, то $\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \mu(d, n)$.

6. Докажите, что $\sum_{a \preceq x \preceq b} \mu(x, b) = 0$.

7. Для каких целых чисел k найдется граф G и его вершины a, b такие, что $\mu(a, b) = k$?