

Добавка про производную многочлена

1. Дано нечётное число n . Обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_n$ корни из единицы степени n . Вычислите

$$\frac{1}{(1 + \omega_1)^2} + \frac{1}{(1 + \omega_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1 + \omega_n)^2}.$$

2. Пусть x_1, \dots, x_n — различные числа.

(а) Пусть $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$ — произвольные числа. Докажите, что существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше $2n$ такой, что $P(x_i) = a_i$ и $P'(x_i) = a'_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

(б) Верно ли, что можно получить многочлен, имеющий любые наперёд заданные значения в точках x_1, \dots, x_n , а также любые наперёд заданные значения первых и вторых производных в них? Если нет, то что верно?

3. **Лемма Гензеля.** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, p — простое число. Пусть $P(a)$ делится на p , а $P'(a)$ не делится на p для некоторого целого a . Докажите, что для любого натурального k найдётся a_k такое, что $P(a_k)$ делится на p^k .
4. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Сколько различных остатков от деления на 81 могут встретиться в последовательности $P(1), P(2), P(3), \dots$?
5. Докажите, что при домножении многочлена на $(x - 1)^{n-1}$ получится многочлен, имеющий не менее n ненулевых коэффициентов.