

Добавка к принципу крайнего

1. Множество, состоящее из конечного числа точек плоскости, обладает следующим свойством: для любых двух его точек A и B существует такая точка этого множества, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?
2. На плоскости отмечено $N > 3$ различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \leq (n + 1)^2$.
3. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гометичными ему с коэффициентом $0,99$ (поворачивать фигуры нельзя).
4. (а) Таракан прополз по пицце радиуса 6 см. Оказалось, что его путь представлял собой ломаную длиной 10 см. Докажите, что можно разрезать пиццу на две одинаковые половины так, чтобы одна из них была «чистой», то есть по ней таракан не ползал.

(б) Червяк прогрыз путь длиной 10 от одной точки на поверхности яблока радиуса 6 до другой. Докажите, что яблоко можно разрезать на две равные половины так, чтобы только одна из них была червивой. Яблоко считаем сферой.