Линейные функции в геометрии

Определение. Будем говорить, что функция f на плоскости линейна, если $f(x, y) = ax + by + c$ где a, b и c фиксированные числа, а (x, y) — координаты точки, к которой мы применяем функциию

Факт. Если линейная функция равна нулю в точках A и B, то она равна нулю в на всей прямой AB. Если функция равна нулю в трех точках, не лежащих на одной прямой, то она равна нулю на всей плоскости.

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с не параллельными сторонами. Найдите ГМТ точек X внутри четырехугольника таких что $S_{AXC} + S_{BXD} = S_{CXB} + S_{DXA}$.

2. На стороне BC треугольника ABC нашлись две точки P, Q такие, что сумма расстояний от них до прямых AB и AC одинакова. Докажите, что ABC равнобедренный.

3. Пусть точка X внутри правильного $2n + 1$-угольника. Соединим ее со всеми вершинами и опустим из нее перпендикуляры на стороны многоугольника. Покрасим получившиеся **a)** отрезки на сторонах многоугольника **b)** треугольники в синий и желтый цвета в шахматном порядке. Тогда сумма синих площадей равна сумме желтых.

4. Докажите, что сумма расстояний от точки внутри равноугольного многоугольника до его сторон постоянна.

5. **Теорема Ньютона.** Докажите, что центр вписанной окружности описанного четырехугольника лежит на его прямой Гаусса.

6. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, продолжения пар его противоположных сторон пересекаются в точках E и F. M, N, K – точки пересечения биссектрис углов A и C, B и D, и внешних углов E и F. Докажите, что M, N и K лежат на одной прямой.

7. Обозначим за I и O центр вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Заведем на сторонах треугольника ориентацию стандартным образом. Докажите, что **a)** прямая OI задается линейным уравнением $IX_a + IX_b + IX_c = 0$ «сумма проекция вектора IX на стороны треугольника равна ноль» **b)** любая перпендикулярная к OI прямая задается линейным уравнением $X_a + X_b + X_c = const$ для некоторого вещественного числа $const$ «сумма ориентированных расстояний от точки до сторон треугольника постоянна. **c)** Докажите, что прямая, соединяющая основания внешних биссектрис треугольника ABC перпендикулярна прямой OI. Как переформулируется это утверждение, если заменить центр вписанной окружности на центр вневписанной?

8. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник. Докажите, что сумма площадей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA, EAB больше площади пятиугольника.

9. Пусть точка P лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что сумма расстояний от нее до касательных к описанной окружности треугольника в вершинах хотя бы в два раза больше, чем сумма расстояний от нее до сторон треугольника.

10. В неравностороннем треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, а точка O — центр описанной окружности. Прямая s проходит через I и перпендикулярна прямой IO. Прямая ℓ, симметричная прямой BC относительно s, пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно (K и L отличны от A). Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO.