Рекурренты - 2

1. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A ровно за n прыжков?

2. Найдите количество функций $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, удовлетворяющих неравеству $|f(k+1) - f(k)| \geqslant 3$ при всех $k \in 1, \ldots, n-1$.

3. Сколько n-разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,

(a) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр;

(b) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2.

4. Сколько существует несамопересекающихся ломаных длины n, начинающихся в начале координат $(0, 0)$, каждое звено которых совпадает с одним из векторов $r = (1, 0), u = (0, 1), d = (0, -1)$?

5. Шеренга солдат называется неправильной, если никакие три подряд стоящих солдата не стоят по росту (ни в порядке возрастания, ни в порядке убывания). Составьте рекуррентное соотношение для количества неправильных шеренг из n солдат разного роста.

6. Легко понять, что $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ для некоторых однозначно определённых целочисленных последовательностей a и b.

(a) Найдите для a_n и b_n формулы общего члена;

(b) Найдите сколько-нибудь (хотя бы 100) знаков после запятой у числа $(1 + \sqrt{2})^{1000}$;

(c) Докажите, что уравнение Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$ не имеет других решений в целых числах, кроме $(x, y) = (\pm a_{2k}, \pm b_{2k}), k \in \mathbb{N}_0$.

7. На клетчатой доске размером $2 \times n$ клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной. Пусть A_n — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток, B_n —количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения $A_n - B_n$.