Рекурренты

1. Пусть последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0 \text{ (для всех целых } n \geqslant 0),$$

а также начальными членами a_0, a_1. Предположим, что квадратное уравнение $x^2+p_1x+p_0=0$ имеет два различных корня λ_1, λ_2.
(a) Проверьте, что для любых чисел c_1, c_2 последовательность $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ удовлетворяет условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0.$$

(b) Докажите, что любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,$$

обязательно имеет вид $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ для некоторых чисел c_1, c_2.

2. В обозначениях предыдущей задачи предположим, что квадратное уравнение $x^2+p_1x+p_0=0$ имеет один корень λ (кратности 2).
(a) Проверьте, что для любых чисел c_1, c_2 последовательность $a_n = (c_1 n + c_2)\lambda^n$ удовлетворяет условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0.$$

(b) Докажите, что любая последовательность, удовлетворяющая условию

$$a_{n+2} + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0,$$

обязательно имеет вид $a_n = (c_1 n + c_2)\lambda^n$ для некоторых чисел c_1, c_2.

3. Найдите линейную рекурренту, задающую последовательность **(a)** $a_n = 2^n + 1$; **(b)** $a_n = n$; **(c)** $a_n = n^2$.

4. С помощью задач 1, 2 найдите формулу общего члена последовательности
(a) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$;
(b) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$;
(c) $b_1 = 2$, $b_2 = 12$, $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$.

5. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.

6. Последовательность Фибоначчи определеяется $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Известно, что $F_n = \sum\limits_{i=0}^{2021} C_{2022}^i F_i$. Найдите n.

7. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.

8. Последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ задана рекурентно: $a_0 = a$, $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$. При каких значениях a последовательность является монотонно возрастающей?

9. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех неотрицательных $m \geqslant n$ выполняется условие $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2022}, если $a_1 = 1$.

10. На какую наибольшую степень двойки может делиться число вида $[(3+\sqrt{10})^{2n-1}]$?