Многочлены над полем $\mathbb{F}_p$. Добавка

Кратностью корня a многочлена $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ называется наибольшее целое k такое, что $P(x)$ делится на $(x-a)^k$. Будем обозначать её через $\mathrm{mult}_P(a)$.

1. Докажите, что $\mathrm{mult}_{P\cdot Q}(a) = \mathrm{mult}_P(a) + \mathrm{mult}_Q(a)$.

2. Докажите, что у многочлена степени $n \geqslant 0$ не более n корней с учётом кратности.

3. **(a)** Докажите, что существует многочлен $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ такой, что $P(0) = 1$ и $P(a) = 0$ для любого $a \in \mathbb{F}_p \backslash \{0\}$.

(b) Докажите, что любую функцию $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ можно задать многочленом.

В задачах ниже полезно следующее соображение. Пусть $f(x), g(x), h(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами такие, что $f(x) = g(x)h(x)$. Обозначим через $[f(x)]_p \in \mathbb{F}_p[x]$ *редукцию* многочлена $f(x)$, а именно многочлен с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$, получающийся из $f(x)$ заменой каждого коэффициента на его остаток от деления на p. Например, $[7x^2+6x-2]_3 = x^2+1$. Аналогично, обозначим через $[g(x)]_p$ и $[h(x)]_p$ редукции многочленов $g(x)$ и $h(x)$, соответственно. Тогда $[f(x)]_p = [g(x)]_p \cdot [h(x)]_p$.

4. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами $3x^{100}+6x^{50}+5$ нельзя представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами.

5. Пусть p — простое число. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = x^{2p} + px^{p+1} - 1$ нельзя представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами.

6. Многочлен $(x+1)^n - 1$ с целыми коэффициентами делится на многочлен $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0$ чётной степени k, у которого все коэффициенты нечётны. Докажите, что n делится на $k+1$.