

## Линейные и квадратичные неравенства

1. Даны числа  $|x_i| \leq 1$  при  $i = 1, 2, 3, 4$ . Какое наименьшее значение может принимать значение выражения  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \underbrace{x_1x_2 - x_1x_3 - \dots - x_3x_4}_{6 \text{ слагаемых}} + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_3x_4x_1$
2. При  $x, y, z \in [0, 1]$  докажите неравенство  $xy + yz + zx \leq 2xyz + 1$ .
3. Дана квадратичная функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$  при  $a > 0$  и отрезок  $[\alpha, \beta]$ . Предложите алгоритм нахождения минимума  $f(x)$  на данном отрезке.
4. При  $x, y, z \in [0, 1]$  докажите неравенство  $3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \leq 2xyz(x + y + z) + 3$ .
5. Дано число  $a > 36$ , а также такие положительные числа  $b$  и  $c$ , что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{2}{3}a^2 < a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

6. Для чисел  $x_i \in [0, 1]$  при  $i = 1, 2, \dots, n$  докажите неравенство  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \leq \frac{n^2}{4}$ .
7. а) В строку б) по кругу выписаны  $n$  неотрицательных чисел с суммой 1. Старательный Петр вычислил произведение каждых двух соседних чисел и сложил все полученные значения. Какой наибольший результат мог получить Петр?
8. Для  $a, b, c, d > 0$  докажите неравенство  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 4(a - b)^2 \sqrt{abcd}$ .