

Графы на поверхностях

Плоский или планарный граф - граф, который можно изобразить на плоскости без пересечения рёбер вне вершин.

1. Формула Эйлера. Докажите, что для связного плоского графа выполнено соотношение $V - E + F = 2$, где V — количество вершин, E — количество рёбер, а F — количество граней данного плоского графа.
2. В стране 32 озера соединяют 45 каналов, так, что из любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько островов образовано этой системой каналов и озёр?
3. Докажите, что для плоского графа с $V \geq 3$ вершинами, E рёбрами и F гранями справедливо неравенство $E \leq 3V - 6$.
4. От каждого из трёх домов ведёт по дороге к каждому из трёх колодцев. Докажите, что какие-то две из этих дорог обязательно пересекаются.
5. Говорят, чтобы вызвать Пиковую даму, надо нарисовать на зеркале пентаграмму, то есть полный граф на пяти вершинах K_5 . Мало кто знает, но дух действительно приходит лишь когда этот рисунок не имеет самопересечений. Возможно ли провести такой обряд?
6. Назовем граф сферическим, если его можно нарисовать на сфере так, чтобы его ребра не имели пересечений, отличных от вершин. Докажите, что граф является сферическим тогда и только тогда, когда он планарен.
7. Докажите, что формула Эйлера также верна для выпуклых многоугольников, где V — количество вершин, E — количество рёбер, а F — количество граней данного многоугольника.
8. Граф называется тороидальным, если его можно изобразить на поверхности тора (бублика) так, чтобы рёбра не имели пересечений, отличных от вершин.
(а) любой ли планарный граф является тороидальным? (б) любой ли тороидальный граф является планарным?
9. Триангуляцией поверхности называется такой граф на этой поверхности без самопересечений, что граница любой области, ограниченной рёбрами, представляет собой цикл из трёх рёбер, причём её можно "деформировать" в часть плоскости (либо внутренность треугольника, либо его внешность). Если задана триангуляция, то можно аналогично плоскому случаю посчитать эйлерову характеристику поверхности $\chi = V - E + F$. Оказывается, она не зависит от триангуляции.
(а) Постройте триангуляцию сферы и посчитайте её эйлерову характеристику. (б) Постройте триангуляцию тора и посчитайте его эйлерову характеристику.
Указание. Тор полезно рассмотреть как квадрат, у которого склеены противоположные стороны, т.е. квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ у которого для каждого x точка $(x, 0)$ склеена с точкой $(x, 1)$, а точка $(0, x)$ — с точкой $(1, x)$.
10. (а) Докажите, что любой граф, который можно нарисовать на плоскости лишь с одним пересечением является тороидальным (б) Докажите, что $K_{3,3}$ и K_5 тороидальны (с) Докажите, что любой граф можно нарисовать без самопересечений на сфере с достаточно большим числом ручек (как гиря, только ручек может быть много).
11. Классифицируйте все правильные многогранники в трёхмерном пространстве.