Многочлены с целыми коэффициентами

Редукцией многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ назовём многочлен с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$, получающийся из $f(x)$ заменой каждого коэффициента на его остаток от деления на p. Будем обозначать её через $[f(x)]_p$. Например, $[7x^2 + 6x - 2]_3 = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.

1. Пусть $f(x), g(x), h(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами такие, что $f(x) = g(x)h(x)$. Докажите, что $[f(x)]_p = [g(x)]_p \cdot [h(x)]_p$.

Напомним, что про многочлен $f(x)$ говорят, что он *неприводим* над $\mathbb{Z}$ (соответственно, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_p$), если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (соответственно, $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, $g, h \in \mathbb{R}[x]$, $g, h \in \mathbb{F}_p[x]$) меньших степеней.

2. Дано простое число p. Про многочлены $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ известно, что все коэффициенты произведения $f(x)g(x)$ делятся на p. Докажите, что все коэффициенты $f(x)$ делятся на p или все коэффициенты $g(x)$ делятся на p.

3. **Лемма Гаусса.** Докажите, что если многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

4. **Признак Эйзенштейна.** Дан многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Известно, что $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}, \ldots, a_0$ а также $p^2 \nmid a_0$. Докажите, что $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Докажите, что многочлен $3x^{100} + 6x^{50} + 5$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

6. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

8. Пусть n — натуральное число. Существует ли многочлен степени n с целыми коэффициентами, обладающий следующим свойством: любой многочлен, у которого все соответственные коэффициенты отличаются не более чем на 2023 от данного, неприводим над $\mathbb{Z}$?