От простого к сложному

1. Найдите остаток числа $(101^4+1)^{77}$ от деления на 101^5.

2. **(a)** Даны целые числа n и a, не делящиеся на p. Пусть сравнение $x^n \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ имеет решение в целых числах. Докажите, что сравнение $x^n \equiv a \pmod{p^k}$ имеет решение в целых числах.
(b) Найдите число решений сравнения $x^3 \equiv 7 \pmod{1024}$.

3. Дано простое $p > 2$ и натуральное a. Пусть сравнение $a^x \equiv -1 \pmod{p}$ имеет решение в натуральных числах. Докажите, что сравнение $a^x \equiv -1 \pmod{p^k}$ имеет решение в целых числах.

4. Существует ли натуральное число, которое, будучи записанным дважды подряд, даст точный квадрат?

5. **(a)** Для простого числа $p > 2$ докажите, что уравнение $x^2+y^2+1 = pz$ имеет решение в целых числах.
(b) Для нечётного числа n докажите, что уравнение $x^2+y^2+1 = nz$ имеет решение в целых числах.
(c) Найдите количество пар натуральных чисел (x, y) таких, что $x, y < 81$ и x^2+y^2+1 делится на 81.

6. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Может ли в последовательности $P(1), P(2), \ldots$
(a) встретиться ровно 78 различных остатков от деления на 79?
(b) встретиться ровно 79 различных остатков от деления на 80?
(c) встретиться ровно 80 различных остатков от деления на 81?