

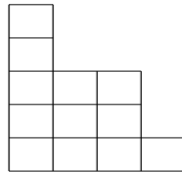
Диаграммы Юнга.

Разбиением числа n называется конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, в сумме дающих n .

Для каждого разбиения λ определяется *диаграмма Юнга* — набор клеток, выровненный по нижней границе, в котором длина первого столбца λ_1 , длина второго λ_2 , ...

Иными словами диаграмма Юнга — это несколько столбцов, идущих слева направо, причём каждый следующий не выше предыдущего.

Например для разбиения $\lambda = [5, 3, 3, 1]$ диаграмма Юнга выглядит следующим образом:



- (а) Докажите, что количество разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа $n + k$ ровно на k слагаемых.

(б) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l , равно количеству разбиений числа n в сумму не более чем l слагаемых, каждое из которых не превосходит k .

(с) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l , равно количеству разбиений числа $kl - n$ в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l .
- Маша написала на доску количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l , Лиза написала количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $l - 1$, а Юра написал количество разбиений числа $n - l$ в сумму не более чем $k - 1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит l . Докажите, что сумма чисел Лизы и Юры равно числу Маши.
- На доске написано несколько натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. На вторую доску записываются следующие числа: b_0 — количество чисел на первой доске; b_1 — сколько на ней чисел, больших единицы; b_2 — сколько чисел, больших двойки, и т.д. до тех пор, пока получаются положительные числа. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, \dots , построенные по тому же принципу на основе чисел на второй доске.

(а) Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают;

(б) Докажите, что количества различных чисел на первой и второй досках совпадают.
- Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более чем на k слагаемых, каждое из которых не превосходит l ?
- Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на доминошки.
- Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки, а также всех клеток, находящихся либо правее, либо выше неё. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток, в диаграмме Юнга какого-то разбиения числа n . Докажите, что:

(а) $s^2 \leq 2n$, (б) $s(k + s) \leq 2n$.
- Докажите, что для уравнения $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$ количество решений уравнения, в которых первые несколько чисел (может быть, одно) a_i натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством решений, в которых все числа a_i равны 0 или 1.