Теорема Турана

Теорема 1 (Туран, 1941). *В графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k \geqslant 3$ вершинах, ребер не более, чем*

$$\frac{(k-2)(n^2-r^2)}{2(k-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r - остаток от деления n на $k-1$.

Определение. *Число независимости* графа G - это размер его максимального независимого множества, то есть, максимального множества вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Оно обозначается $\alpha(G)$.

Теорема 2. *Если в графе G на n вершинах $\alpha(G) \leqslant k$, то ребер в нем хотя бы*

$$n \cdot \left[\frac{n}{k}\right] - k \cdot \frac{\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)}{2}.$$

1. Докажите, что в графе без треугольников на $2n$ вершинах не может быть более n^2 ребер, причем эта оценка достигается. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для графа с $2n+1$ вершиной.

2. Докажите, что эти теоремы эквивалентны, то есть, выведите из первой вторую и из второй первую. Для каждых n и k приведите пример, когда оценка из теоремы 1 точна.

3. *Клонированием вершины v* назовем операцию добавления в граф вершины v', соединенной ровно с теми же вершинами, что и v.

(a) Докажите, что если в графе не было полного подграфа на m вершинах, то он не появится при клонировании любой.

Через G обозначим граф на n вершинах без полного подграфа на m вершинах с максимальным возможным числом рёбер.

(b) Докажите, что степени любых двух несмежных вершин графа G равны.

(c) Докажите, что степени любых двух смежных вершин графа G отличаются не более чем на 1.

(d) Докажите, что если в графе Gвершины u и v несмежны и вершины v и w несмежны, то вершины u и w также несмежны.

(e) Докажите, что граф G — полный $(m-1)$-дольный граф с почти равными долями.

4. Докажите теорему Турана во второй формулировке по индукции, убирая на каждом шаге максимальное независимое множество.

5. В графе n вершин, среди любых четырёх вершин проведено не более четырёх рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

6. Есть n батареек, среди них $k+1$ хорошая. За один ход можно попробовать вставить в фонарик две батарейки. Он заработает, если обе вставленные батарейки были хорошими. За какое минимальное число действий гарантированно получится зажечь фонарик?

7. На кружок пришли 60 школьников. За время занятия некоторые пары из них поговорили про гусей, а некоторые про уток, причем никакая пара не говорила про оба вида птиц. Также оказалось, что никакие три человека не обсуждали попарно один и тот же вид. Какое наибольшее количество пар школьников могло поговорить на занятии о гусях или утках?

8. Докажите, что в графе на $2n$ вершинах с n^2+1 ребром найдется хотя бы n треугольников.