

## Инверсия в вершине треугольника

Часто оказывается полезным делать инверсию в различных точках на картинке, исследуя, как она при этом меняется. Наиболее популярным трюком является инверсия в вершине треугольника. Часто мы будем говорить «делаем инверсию с центром в точке  $A$ », подразумевая, что мы делаем инверсию с произвольным положительным радиусом.

В следующей задаче рассматривается треугольник  $ABC$  и инверсия  $\mathcal{I}$  относительно окружности с центром в точке  $A$  произвольного положительного радиуса. За  $X'$  мы будем обозначать образ точки  $X$  после инверсии. Нас интересует описание инверсных образов различных точек, связанных с треугольником  $ABC$  в терминах треугольника  $AB'C'$ .

- (a) Пусть  $O$  — центр описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Докажите, что  $O'$  — точка, симметричная точке  $A$  относительно прямой  $BC$ .

(b) Пусть  $H$  — основание высоты  $AH$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $H'$  — точка, диаметрально противоположная  $A$  на окружности  $(B'AC')$ .

(c) Пусть  $I$  — инцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $I'$  — центр вневписанной окружности треугольника  $AB'C'$ , касающейся отрезка  $BC$ .

(d) Пусть  $AM$  — медиана треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямая  $AM'$  содержит симедиану треугольника  $AB'C'$ .
- Точка  $S$  расположена вне окружности  $\omega$  с центром в точке  $S$ . Инверсия относительно окружности с центром в точке  $S$  радиуса  $R > 0$  переводит  $\omega$  в  $\omega'$ . Докажите, что точка  $O$  переходит при этой инверсии в середину отрезка, соединяющего основания касательных из  $S$  к  $\omega'$ .
- Окружность  $\Omega$  описана около треугольника  $ABC$ . Окружность  $\gamma$  касается внутренним образом окружности  $\Omega$  в точке  $T$ , а также стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $U$  и  $V$  соответственно. Докажите, что прямая  $UV$  содержит инцентр треугольника  $ABC$ .
- Обозначим за  $S$  пересечение касательных в вершинах  $B$  и  $C$  к описанной около треугольника  $ABC$  окружности. При помощи инверсии в точке  $A$  покажите, что прямая  $AS$  содержит симедиану треугольника  $ABC$ .
- На продолжениях сторон  $AB$  и  $AC$  за точки  $B$  и  $C$  выбираются такие точки  $U$  и  $V$ , что  $BV = AB$  и  $CU = AC$ . Точка  $A'$  диаметрально противоположна точке  $A$  на окружности  $(ABC)$ . Окружности  $(ABC)$  и  $(UA'V)$  второй раз пересекаются в точке  $D \neq A'$ . Докажите, что прямая  $AD$  содержит симедиану треугольника  $ABC$ .
- Окружность  $\omega$  вписана в угол  $ABC$  и касается внешним образом окружности  $\Gamma$ , описанной около треугольника  $ABC$ . Окружность  $\gamma$  лежит внутри угла  $ABC$  и касается прямой  $BC$  в точке  $D$ , окружности  $\Gamma$  — в точке  $E$  и окружности  $\omega$  — в точке  $F$ . Прямые  $DE$  и  $BF$  вторично пересекают окружность  $\Gamma$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что прямые  $XY$  и  $CF$  перпендикулярны.
- Полуописанная окружность.** Вписанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  касается его стороны  $BC$  в точке  $D$ . Обозначим за  $I_A$  центр вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , касающейся отрезка  $BC$ . Прямая  $I_AD$  пересекает  $\omega$  в точке  $S \neq D$ . Докажите, что окружности  $(BSC)$  и  $\omega$  касаются.