Суммы чисел

0. *Даны целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма делилась на n.*

1. В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{1000}. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на $0,001$.

2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечётное число l, не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l.

3. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Докажите, что можно выбрать некоторые из них (хотя бы одно), и взять часть выбранных чисел с плюсом, а часть с минусом так, чтобы в сумме получилось число, делящееся на 100.

4. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа таких, что $a + b = c + d$.

5. В строку выписано n целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

6. По кругу стоят n целых чисел с суммой 1. Докажите, что существует единственное такое i, что все числа $a_i, a_i + a_{i+1}, a_i + a_{i+1} + a_{i+2}, \ldots, a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + ... + a_{i+n-1}$ положительны.

7. Сумма $n + 1$ натурального числа равна $2n$. Докажите, что эти числа можно покрасить в синий и красный цвета так, чтобы сумма синих чисел была равна сумме красных.

8. Про натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ известно, что $a_k \leqslant k$ для каждого k и сумма всех этих чисел четна. Докажите, что эти числа можно покрасить в синий и красный цвета так, чтобы сумма синих чисел была равна сумме красных.

.